

Methodus Differentialis :
SIVE
TRACTATUS
DE
SUMMATIONE
ET
INTERPOLATIONE
SERIERUM INFINITARUM.

AUCTORE *JACOBO STIRLING*, R. S. S. K



LONDINI:
Typis GUL. BOWYER.
Impensis G. STRAHAN ad Insigne Globi aurati e regione
Ex Cambii Regalis. MDCCXXX.

Methodus Differentialis :

SIVE

TRACTATUS

DE

SUMMATIONE

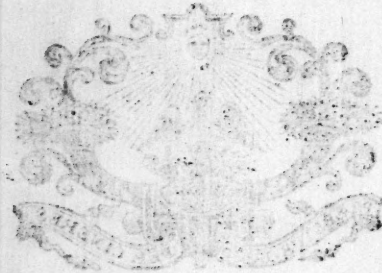
ET

INTERPOLATIONE

SERIES ARITHMETICARUM



AUCTORE JOHANNES KEPLER R.S.S.



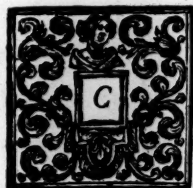
LONDINI :

Typis Gul. Bower.

Impensis G. STRAHAN ad Ingenio Globi auctoris e regione
Emendat Regalis. MDCCLXX.



P R Æ F A T I O.



UM sæpiſſime eveniat ut Series adeo lente convergant ad veritatem, ut non magis conducant ad finem propositum quam si revera essent divergentes; exhibui quædam Theoremata in parte priore hujus Tractatus, quibus prompte acceditur ad valores earum Serierum quæ omnium lentissime approximant: Et eo quidem consilio, ut Problemata quæ dependent ex Quadraturis, eodem jure pro solutis haberi possint quo ea quæ reducuntur ad Æquationes affectas. Hic enim non inquiero quenam Series sint summabiles (ut ex titulo nonnulli forsân conjiciant) sed quibus artibus assequamur valores earum quæ summari nequeunt.

Hujus generis Tractatum edidit Jacobus Gregorius in Appendice ad Veram Circuli & Hyperbolæ Quadraturam, ubi docuit modum facillimum approximandi ad Areas harum Curvarum ex datis perpaucis polygonis pauciorum laterum. Eoque pacto methodum Exhaustionum

B

Archimedis

P R Æ F A T I O.

Archimedis expeditam adeo reddidit, ut si eadem methodus pari cum successu ad reliquas Curvas extendi posset, frustra impenderetur ulterior opera in eliciendis Areis. Quodque Gregorius ibi effecit in Serie polygonorum, idem fere nos hic generaliter proponimus in qualibet aliâ quæ simplici gaudet Terminorum relatione.

Newtonum hæc de re olim meditatam fuisse constat ex Epistolâ ejus priori ad Oldenburgum quæ impressa habetur in Commercio Epistolico Collinii. Nimirum postquam computo produxerat Aream Circuli ad sedecim decimales, inquit, Si alias artes adhibuisssem, potui per eundem numerum Terminorum Seriei, pervenisse ad multo plura loca figurarum, puta viginti quinque aut amplius: Sed animus fuit hic ostendere quid per simplex Seriei computum præstari posset. Attamen inter scripta ejus (hactenus saltem edita) ne vestigium quidem extat unde conjecturam faciamus de hisce artibus, etiamsi insignem eas proferendi occasionem nactus esset in hæc ipsissimâ Epistolâ. In priori etiam Epistolâ ad eundem, ibidem impressâ; narrat se excogitasse quædam circa Reductionem infinitarum Serierum in finitas ubi rei natura tulerit: Quæ si inter opera ejus posthuma supersint, proculdubio huic doctrinæ lucem haud exigua præbebunt: Nam Theoremata generalia quæ valores Serierum exhibent accurate, quando id fieri potest, in aliis casibus necesse approximabunt, modo rite adhibeantur.

Principium quod in hunc effectum vulgo adducitur, est Assumptio differentię duorum valorum successivorum aliqujus quantitatis, ut exinde formentur Termini quorum summa prius nota fuerat; idem scilicet principium, quo olim usus est Newtonus ad Ordinatum Curvæ deducendam

P R Æ F A T I O.

ex data Area. Quod licet sit universale in Quadraturis, est particulare tantummodo in Summationibus; quippe ad eas solummodo Series applicabile quarum Termini possunt assignari: quum tamen æque facilis sit assignatio Summæ atque Termini in iis Seriebus quæ magnâ ex parte in Quadraturis prodire solent.

Fundamentum longe generalius subministravit Methodus Newtoni Differentialis: Ille utique describit Curvam Parabolicam per extremitates quolibet Ordinatarum sive Terminorum; eâque ratione assignat valorem cujusvis intermedii per Seriem infinitam; quæ tamen ad veritatem non accedet si Terminus ille longe distet ab initio. Ut obtinerem igitur Terminos Serierum remotissimos, descripsi figuram Hyperbolicam per extremitates Terminorum; & res successit, prodeunte valore Termini quantumvis distantis, per Seriem convergentem. Sed & hoc Problemate generaliter soluto, non latuit casus ejus facillimus, utpote inventio Termini infinito intervallo distantis a principio; quæ quidem æquipollet Summationi Serierum. Cæterum descriptio Curvæ cujuscunque Geometricæ per data puncta, uni tantum Serierum generi sufficit: atque alia sunt innumera nullatenus tractanda ex hoc fundamento. Nam valor Termini per Parabolam aut Hyperbolam inventus, non approximat nisi ubi differentiæ secundum præscripta Newtoniana sumptæ constituent progressionem celeriter satis decrescentem.

Hisce perspectis, me tandem contuli ad contemplandam Relationem Terminorum, proprietatem Serierum maxime insignem & simplicem, quæ vulgo ad eas continuandas adhiberi solet: Non enim ignorabam Moivræum hanc Terminorum proprietatem summo cum successu in Algebram

PRÆFATIO.

bram introduxisse, tanquam fundamentum ad difficillima circa Series recurrentes Problemata solvenda: Ideoque decreveram experiri num ad alias quoque extendi posset: Quod sane dubitabam cum tanta sit inter recurrentes atque alias Series discrepantia. At factò experimento, res præter spem successit, deprehendi enim Inventum hocce Moivræanum continere principia generalissima & etiam simplicissima non solum in Seriebus recurrentibus, sed & in quibuscumque aliis, in quibus relatio Terminorum variatur secundum legem quamcunque regularem. Nam Terminorum relatio, etiamsi sit variabilis, facile tamen assignabilis est: Atque exinde Summationes & Interpolationes, aliaque ejusmodi Problemata difficiliora perducuntur ad quoddam genus Æquationum, quæ præter Radicem extrahendam involvunt alias quantitates incognitas quæ nequeunt eliminari; quo non obstante, harum Æquationum resolutio perficitur nonnunquam summâ facilitate, nonnunquam vero non succedit nisi mediantibus Moivræi Inventis circa assignationem Terminorum in Seriebus recurrentibus. Et de hoc argumento totus fere agit hicce Libellus.

Problema de inveniendâ Unciâ mediâ in permagnâ dignitate binomii solutum erat a Moivræo ante aliquot annos quam ego idem attigeram: Nec probabile est quod in hunc usque diem de eodem cogitasset, ni suggestisset Spectatissimus Vir, D^r. Alex. Cuming, se plurimum suspicari an idem solvi posset per Methodum Differentialem Newtoni.

TRACTATUS

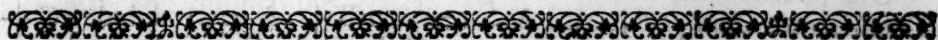


TRACTATUS

DE

SUMMATIONE & INTERPOLATIONE

Serierum Infinitarum.



INTRODUCTIO.



SICUT Curvæ non determinantur ex datis quotlibet earum ordinatis, sed ex relatione inter Abscissas & Ordinatas in genere; ita neque Series determinantur ex datis quotlibet earum Terminis, sed ex relatione inter Terminos successivos. Quantitates enim quotcunque, numero tamen finitæ, constituere possunt Terminos in diversis Seriebus: unica vero est Series in qua iidem sunt Termini initiales, eademque lex formandi reliquos in infinitum. Relationes igitur Terminorum primo loco indagandæ sunt; deinde hæ inventæ denotandæ sunt Æquationibus Differentialibus perinde ac *Cartesius* definivit Curvas Æquationibus Algebraicis: quibus habitis Problemata

B

circa

INTRODUCTIO.

circa Summationem & Interpolationem, aliaque istiusmodi ad Series spectantia solventur per Analysin non minus certam quam est Algebra vulgaris.

De Relatione Terminorum.

Termini Serierum binatim, ternatim, aut plures numero sumpti relationem quandam magna ex parte inter se obtinent simplicem & obviam, per quam Series determinantur & producuntur ad libitum. Ut si dividatur unitas per $1-x$, prodibit progressio Geometrica in quâ Terminus quivis consequens est ad illum immediate antecedentem ut x ad unitatem. Per hanc enim Proprietatem Series $1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+\&c.$ ab alia quavis distinguitur & produciur in infinitum.

Proponatur fractio $\frac{1}{r+sx+txx}$ in Seriem resolvenda: illum in finem finge $y = \frac{1}{r+sx+txx}$; ac ducendo utramque partem in Denominatorem, habebitur $y \times r+sx+txx = 1$, vel $y \times r+sx+txx - 1 = 0$. Pro y substitue Seriem debitæ formæ $A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+Fx^5+\&c.$ atque resultabit

$$\left. \begin{array}{l} rA+rB \\ -1+sA \end{array} \right\} x^{-1} + \left. \begin{array}{l} +rC \\ +sB \end{array} \right\} x^0 + \left. \begin{array}{l} +rD \\ +sC \end{array} \right\} x^1 + \left. \begin{array}{l} +rE \\ +sD \end{array} \right\} x^2 + \left. \begin{array}{l} +rF \\ +sE \end{array} \right\} x^3 + \&c. = 0.$$

Ubi ponendo membra homologa nihilo æqualia, ad determinandum Coefficientes assumptos, erit $rA-1=0$, $rB+sA=0$; deinde $rC+sB+tA=0$, $rD+sC+tB=0$, $rE+sD+tC=0$, & sic in infinitum. Ex quibus constat eandem ubique prodire relationem inter tres quoscunque Terminos successivos. Similiter usurpando pro y Seriem hujus formæ $Ax^{-2}+Bx^{-3}+Cx^{-4}+Dx^{-5}+\&c.$ & substituendo eandem in Æquatione, resultabit

$$\left. \begin{array}{l} tA+tB \\ -1+sA \end{array} \right\} x^{-1} + \left. \begin{array}{l} +tC \\ +sB \end{array} \right\} x^{-2} + \left. \begin{array}{l} +tD \\ +sC \end{array} \right\} x^{-3} + \left. \begin{array}{l} +tE \\ +sD \end{array} \right\} x^{-4} + \&c. = 0.$$

Atque jam ad determinandos Coefficientes, habemus Æquationes $tA-1=0$, $tB+sA=0$; tum $rA+sB+tC=0$, $rB+sC+tD=0$, $rC+sD+tE=0$, & ita deinceps in reliquis. Ubi patet easdem prodire relationes ac in computo superiore, sumptis tamen Coefficientibus in ordine inverso. Et quantitates r, s, t , quæ indicant relationem Terminorum, eadem sunt quæ in Denominatore fractionis.

Hanc

INTRODUCTIO.

3

Hanc autem harum Serierum Proprietatem, utcunque obvia sit, primus omnium in usus adhibuit D. *Moiræus* in solutione Problematum circa Series infinitas, quæ aliàs forent intricatissima.

In plurimis autem Seriebus relatio Terminorum non est constans ut in iis ex Divisione prodeuntibus; variatur tamen sæpissime secundum notam legem oculi intuitu patentem; cujus rei Exempla sunt Series quæ pro Quadraturis vulgo proferuntur, aliaque innumera. Ut in hac $1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}x^4 + \&c.$ Termini continuantur in infinitum per multiplicationem continuam harum fractionum $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \&c.$ Et in hac $1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{16}x^4 + \&c.$ per multiplicationem harum $\frac{1 \times 1}{2 \times 3}, \frac{3 \times 3}{4 \times 5}, \frac{5 \times 5}{6 \times 7}, \frac{7 \times 7}{8 \times 9}, \&c.$ Et hæ fractiones variantur secundum legem cuivis manifestam; atque adeo in ipsarum assignatione, nulla erit difficultas.

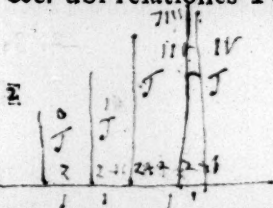
De Æquationibus Differentialibus quæ definiunt Series.

Æquatio Seriem definiens ea est, quæ assignat relationem Terminorum generaliter ex datis ipsorum distantis ab initio. Concipiendi autem sunt Termini consistere super rectam positione datam tanquam totidem Ordinatae, quarum distantia communis est unitas. Unitatem vero simplicitatis gratiâ ubique usurpo in sequentibus pro intervallo communi: quod semel monuisse sufficiat.

Terminos Seriei initiales designo literis Alphabeti initialibus A, B, C, D, &c. A est primus, B secundus, C tertius, & sic porro. Et Terminum quemvis in genere denoto literâ T, atque reliquos ordine succedentes eâdem literâ, adjunctis numeris *Romanis* I; II, III, IV, V, VI, VII, &c. distinctionis gratiâ. Ut si T sit decimus, erit T' decimus primus, T'' decimus secundus, T''' decimus tertius, & sic deinceps. Et in genere quicumque Terminus definitur per T, succedentes definiuntur universaliter per T', T'', T''', Tiv, &c.

Distantiam Termini T à Termino quovis dato, vel à puncto quovis dato inter duos quoslibet Terminos intermedio, denoto quantitate indeterminatâ z: quo pacto distantia Terminorum T', T'', T''', &c. à prædicto Termino vel puncto, erunt $z+1, z+2, z+3, \&c.$ Nam incrementum Abscissæ z æquale est intervallo communi Terminorum supra Abscissam consistentium: atque quantitates z, $z+1, z+2, z+3, \&c.$ sibi mutuò succedunt dum Termini posteriores succedunt anterioribus.

Hiscæ præmissis, proponatur Series $1, \frac{1}{2}x, \frac{1}{8}x^2, \frac{1}{16}x^3, \frac{3}{128}x^4, \frac{63}{2048}x^5, \&c.$ ubi relationes Terminorum sunt $B = \frac{1}{2}Ax, C = \frac{1}{4}Bx, D = \frac{1}{8}Cx, E =$



$$\frac{24}{2 \times 3} = \frac{4 \times 6}{2 \times 3} = 4$$

$$\frac{16}{4 \times 2} = \frac{2 \times 8}{4 \times 2} = 2$$

$E = \frac{z}{3} Dx$, &c. relatio in genere definietur $\text{Æquatione } T' = \frac{z + \frac{1}{2}}{z + 1} T x$,

ubi z designat distantiam ipsius T à primo Terminò Seriei. Nam scribendo 0, 1, 2, 3, 4, &c. successive pro z , prodibunt relationes Terminorum in Serie proposita. Similiter si z denotet distantiam ipsius

T à secundo Terminò Seriei, Æquatio erit $T' = \frac{z + \frac{3}{2}}{z + 2} T x$, uti con-

stabit scribendo numeros — 1, 0, 1, 2, 3, &c. successive pro z . Vel si indeterminata z denotet locum Terminì T in Serie, ejus valores successivi erunt 1, 2, 3, 4, &c. & $\text{Æquatio } T' = \frac{z - \frac{1}{2}}{z} T x$; ut experienti patebit.

Innumeræ igitur diversæ Æquationes Differentiales eandem Seriem definire possunt, prout in hoc vel illo puncto sumitur initium Abscissæ z . Et contra eadem Æquatio definit innumeras Series diversas, adhibendo diversos valores successivos pro z . Nam in $\text{Æquatione } T' = \frac{z - \frac{1}{2}}{z} T x$, quæ definit Seriem de qua nunc egimus, quando 1, 2, 3, 4, &c. sunt valores Abscissæ ordine succedentes; scribe $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{2}$, &c. successive pro z , & provenient relationes Terminorum $B = \frac{2}{3} Ax$, $C = \frac{4}{5} Bx$, $D = \frac{6}{7} Cx$, &c. Unde fit Series A , $\frac{2}{3} Ax$, $\frac{8}{15} Ax^2$, $\frac{16}{35} Ax^3$, $\frac{128}{315} Ax^4$, &c. quæ est diversa a priore. Æquatio autem semper determinat Seriem ex datis valoribus Abscissæ & simul primo Terminò, ubi Æquatio involvit duos tantum Terminos Seriei. Ut in novissima dantur omnes Terminì ex dato primo A . Attamen ubi Æquatio involvit tres Terminos, oportet duos dari, & tres ubi involvit quatuor, & sic porro ad determinandam Seriem.

Proponatur jam Series x , $\frac{1}{6} x^3$, $\frac{3}{40} x^5$, $\frac{5}{112} x^7$, $\frac{35}{1152} x^9$, &c. ubi relationes Terminorum sunt $B = \frac{1 \times 1}{2 \times 3} Ax^2$, $C = \frac{3 \times 3}{4 \times 5} Bx^2$, $D = \frac{5 \times 5}{6 \times 7} Cx^2$,

&c. Æquatio ad eandem erit $T' = \frac{2z - 1 \times 2z - 1}{2z \times 2z + 1} T x^2$, vel

$T' = \frac{4zz - 4z + 1}{4zz + 2z} T x^2$, ubi valores successivi indeterminatæ z sunt 1, 2, 3, 4, &c. Igitur in Æquatione definiente Seriem, Abscissâ z potest esse unius, duarum, vel plurium dimensionum.

Series quarum Terminì sunt assignabiles, definiri possunt Æquationibus Terminos assignantibus. Sic Series $1 - \frac{1}{2} x + \frac{1}{3} x^2 - \frac{1}{4} x^3 + \frac{1}{5} x^4 - \dots$ definitur $\text{Æquatione } T = \frac{-x^\infty}{z + 1}$, ut constabit substituendo 0, 1,

2, 3,

2, 3, &c. pro z . Atque ad eundem modum Series $x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{25}x^5 + \&c.$ denotatur per hanc $T = \frac{x^z}{z^z}$. Tales Æquationes

reduci semper possunt ad eas alterius generis: nam ubi Termini sunt assignabiles, relationes eorum erunt etiam assignabiles. Et differentia inter has & illas raro tanta erit quin cuique tuto procedere licuerit prout sibi visum fuerit.

Ex hætenus dictis constat relationes Terminorum consequentium derivari ex iis antecedentium, scribendo pro z ejus valorem successivum $z+1$ in Æquatione Differentiali. Proponatur Æquatio $T' = \frac{z+1}{z} T$; scribe $z+1$ pro z , T' pro T , & T'' pro T' ; atque orietur $T'' = \frac{z+1}{z+1} T'$, quæ est relatio inter Terminos T' & T'' . In hac ultima scribe valores variabilium consequentes $z+1$, T'' , & T''' , pro antecedentibus z , T' & T'' , & obtinebis $T''' = \frac{z+1}{z+2} T''$ relationem utique inter T'' & T''' .

Sed & contraria operatione regredi licet ad relationem Terminorum antecedentium ex data ea consequentium. Sit Æquatio $T'' = \frac{z^2-1}{z^3+3z^2+3z+2} T'$, & in eadem scribe T pro T' , T' pro T'' , & $z-1$ pro z ; atque habebis $T' = \frac{z^2-2z}{z^3+1} T$. Hoc modo regredi-

endo & progrediendo, possunt Series continuari hinc inde in infinitum ubi earum natura tulerit: atque etiam si ignoretur quinam Termini denotentur per T , T' , T'' , &c. instituere licet super iis computum, tanquam essent prorsus cogniti.

Æquationes de quibus hætenus egimus, involvunt duos tantum Terminos Seriei; possunt vero involvere plures, & tunc Termini quam indeterminata z esse plurium dimensionum. Ceterum in hoc specimine simpliciores tantum attingo.

De Forma & Reductione Serierum.

Postquam perduximus Series ad Æquationes Differentiales, monstrandum est qua ratione eadem sint resolvendæ in numeris. Nam Analystæ munus est quantitates quocunque modo determinatas eruere accurate vel quam proxime. Radices autem Æquationum Differentialium commodissime resolvuntur in Series formarum sequentium

$$A + Bz + Cz \cdot z^{-1} + Dz \cdot z^{-1} \cdot z^{-2} + Ez \cdot z^{-1} \cdot z^{-2} \cdot z^{-3} + \&c.$$

$$A + \frac{B}{z} + \frac{C}{z \cdot z + 1} + \frac{D}{z \cdot z + 1 \cdot z + 2} + \frac{E}{z \cdot z + 1 \cdot z + 2 \cdot z + 3} + \&c.$$

Quippe ubi z est quantitas parva, prior forma erit adhibenda; & posterior ubi magna. Et hæ Series quæ componuntur ex Factoribus in progressionem Arithmetica, longe magis idoneæ sunt huic negotio quam vulgares quæ conflantur ex dignitatibus indeterminatæ ascendentes vel descendentes. Insuper forma posterior hoc habet commodi, quod in eadem potest esse z quantumvis fere magna, id quod efficit Seriem celerrime convergentem.

Sin vero harum Serierum formæ per quaslibet operationes mutantur, debent revocari ad easdem quarum prius erant, ut Termini reddantur homologi eorumque collatio institui possit prout res exigit. Ut si habeatur Æquatio sequens;

$$T = A + Bz + Cz \cdot z^{-1} + Dz \cdot z^{-1} \cdot z^{-2} + Ez \cdot z^{-1} \cdot z^{-2} \cdot z^{-3} + \&c.$$

Eadem ducta in z pristinam formam amittet, atque novam induet, proveniente scilicet

$$Tz = Az + Bz^2 + Cz^2 \cdot z^{-1} + Dz^2 \cdot z^{-1} \cdot z^{-2} + Ez^2 \cdot z^{-1} \cdot z^{-2} \cdot z^{-3} + \&c.$$

Unde constat Terminos ejus comparari non posse cum correspondentibus in Serie priore. Itaque ut debita forma restituatur, sic operor

$$Az - - - - - = Az,$$

$$Bz^2 - - - - - = Bz + Bz \cdot z^{-1},$$

$$Cz^2 \cdot z^{-1} - - - - - = * 2Cz \cdot z^{-1} + Cz \cdot z^{-1} \cdot z^{-2},$$

$$Dz^2 \cdot z^{-1} \cdot z^{-2} - - - = * * 3Dz \cdot z^{-1} \cdot z^{-2} + Dz \cdot z^{-1} \cdot z^{-2} \cdot z^{-3}$$

$$Ez^2 \cdot z^{-1} \cdot z^{-2} \cdot z^{-3} = * * - - - * - - - 4Ez \cdot z^{-1} \cdot z^{-2} \cdot z^{-3} + \&c.$$

Adeoque colligendo Terminos homologos in unum, Series ad pristinam formam reducta erit

$$Tz = \left\{ \frac{A}{1} + \frac{B}{2} \right\} z + \left\{ \frac{B}{1} + \frac{C}{3} \right\} z \cdot z^{-1} + \left\{ \frac{C}{1} + \frac{D}{4} \right\} z \cdot z^{-1} \cdot z^{-2} + \left\{ \frac{D}{1} + \frac{E}{5} \right\} z \cdot z^{-1} \cdot z^{-2} \cdot z^{-3} + \&c.$$

Nimirum cum Terminorum *ὁμολογία* nequiquam pendeat ex Coefficientibus $A, B, C, D, \&c.$ sed omnino ex indeterminata z , Terminus $\left\{ \frac{A}{1} + \frac{B}{2} \right\} z$ primus in hac Serie comparari potest cum Bz secundo in altera, item secundus in hac cum tertio in illa, & sic in reliquis.

Similiter si in Æquatione priore $T = A + Bz + Cz \cdot z^{-1} + Dz \cdot z^{-1} \cdot z^{-2} + \&c.$ scribantur variabilium valores succedentes pro præsentibus, hoc est T' pro T , & $z + 1$ pro z , emerget

$$T' =$$

INTRODUCTIO.

7

$$T' = A + Bz + C\overline{z+1} + D\overline{z+1}.\overline{z-1} + E\overline{z+1}.\overline{z-1}.\overline{z-2} + \&c.$$

Est vero

$$A \text{ ----- } = A,$$

$$B\overline{z+1} \text{ ----- } = B + Bz,$$

$$C\overline{z+1}.\overline{z} \text{ ----- } = * \ 2Cz + Cz.\overline{z-1},$$

$$D\overline{z+1}.\overline{z}.\overline{z-1} \text{ ----- } = * \text{ -- } * \text{ -- } 3Dz.\overline{z-1} + Dz.\overline{z-1}.\overline{z-2}$$

$$E\overline{z+1}.\overline{z}.\overline{z-1}.\overline{z-2} = * \text{ -- } * \text{ -- } * \text{ -- } * \text{ -- } * \text{ -- } 4Ez.\overline{z-1}.\overline{z-2} + \&c.$$

Et inde

$$T' = \left\{ \begin{array}{l} +A + B \\ +B + 2C \end{array} \right\} z + \left\{ \begin{array}{l} C \\ +3D \end{array} \right\} \overline{z-1} + \left\{ \begin{array}{l} D \\ +4E \end{array} \right\} \overline{z-1}.\overline{z-2} + \left\{ \begin{array}{l} E \\ +5F \end{array} \right\} \overline{z-1}.\overline{z-2}.\overline{z-3} + \&c.$$

Quæ est forma desiderata.

Hem vero harum Operationum fundamentum. Quantitas reducenda, per multiplicationem reducatur ad Potestates Indeterminatæ z : dein operare ad modum Exempli sequentis. Sit $\overline{z-3} \times \overline{z} \times \overline{z+1} \times \overline{z+4}$ quantitas reducenda; finge

$$\overline{z-3} \times \overline{z} \times \overline{z+1} \times \overline{z+4} = a\overline{z}.\overline{z-1}.\overline{z-2}.\overline{z-3} + b\overline{z}.\overline{z-1}.\overline{z-2} + c\overline{z}.\overline{z-1} + dz.$$

Ubi maximus numerus Factorum in quantitate resoluta æqualis est numero eorundem in quantitate resolvenda. Reducatur utraque quantitas ad Potestates Indeterminatæ, factâ multiplicatione, & habebitur

$$z^4 + 2z^3 - 11z^2 - 12z = az^4 + \left\{ \begin{array}{l} 6a \\ +b \end{array} \right\} z^3 + \left\{ \begin{array}{l} +11a \\ -3b \\ +c \end{array} \right\} z^2 + \left\{ \begin{array}{l} -6a \\ +2b \\ -c \\ +d \end{array} \right\} z.$$

Atque comparando Terminos homologos, obtinebimus $a = 1$, $b = 6a = 2$, $c = 3b + 11a = -11$, $d = c + 2b - 6a = -12$; ex quibus eruitur $a = 1$, $b = 2$, $c = -11$, $d = -12$; hinc fit quantitas proposita

$$z^4 + 2z^3 - 11z^2 - 12z = z.\overline{z-1}.\overline{z-2}.\overline{z-3} + 8z.\overline{z-1}.\overline{z-2} + 2z.\overline{z-1} - 20z.$$

Et ad eundem prorsus modum procedere licet in aliis casibus. Brevitatis autem gratiâ, accipe regulam sequentem. Divide unitatem per Terminos hujus progressionis continuæ, $n-1$, $n-2$, $n-3$, $n-4$, &c. hoc est, divide unitatem per $n-1$, & Quotum prodeuntem per $n-2$, & novissimum Quotum per $n-3$, & sic porro. Tum Quotos omnes sic prodeuntes dispone regulariter in Tabula ut vides, rejectis Dignitatibus ipsius n , & retentis solummodo Coefficientibus, utpote qui soli huic negotio sunt utiles; atque habebis

Tabulam

Tabulam priorem.

1	1	1	1	1	1	1	1	1	&c.
	1	3	7	15	31	63	127	255	&c.
		1	6	25	90	301	966	3025	&c.
			1	10	65	350	1701	7770	&c.
				1	15	140	1050	6951	&c.
					1	21	266	2646	&c.
						1	28	461	&c.
							1	36	&c.
								1	&c.
									&c.

Assume jam pro Coefficientibus, numeros in columnis descendenti-
bus, & habebis valores Dignitatum sequentes.

$$z = z,$$

$$z^2 = z + z \cdot \overline{z-1},$$

$$z^3 = z + 3z \cdot \overline{z-1} + z \cdot \overline{z-1} \cdot \overline{z-2},$$

$$z^4 = z + 7z \cdot \overline{z-1} + 7z \cdot \overline{z-1} \cdot \overline{z-2} + z \cdot \overline{z-1} \cdot \overline{z-2} \cdot \overline{z-3},$$

$$z^5 = z + 15z \cdot \overline{z-1} + 25z \cdot \overline{z-1} \cdot \overline{z-2} + 10z \cdot \overline{z-1} \cdot \overline{z-2} \cdot \overline{z-3} + z \cdot \overline{z-1} \cdot \overline{z-2} \cdot \overline{z-3} \cdot \overline{z-4}, \&c.$$

Hac itaque Tabulâ semel habitâ, quantitas quælibet reducitur ad
formam quæsitam absque tædio computi. Proponatur ea hætenus re-
ducta $z^4 + 2z^3 - 11z^2 - 12z$. Excerpe valores Dignitatum ex Ta-
bula, eosque ducito respective in suos Coefficientes -12 , -11 , $+2$,
& 1 , atque obtinebis

$$-12z = -12z,$$

$$-11z^2 = -11z - 11z \cdot \overline{z-1},$$

$$+ 2z^3 = + 2z + 6z \cdot \overline{z-1} + 2z \cdot \overline{z-1} \cdot \overline{z-2},$$

$$+ z^4 = + z + 7z \cdot \overline{z-1} + 6z \cdot \overline{z-1} \cdot \overline{z-2} + z \cdot \overline{z-1} \cdot \overline{z-2} \cdot \overline{z-3},$$

$$z^4 + 2z^3 - 11z^2 - 12z = -20z + 2z \cdot \overline{z-1} + 8z \cdot \overline{z-1} \cdot \overline{z-2} + z \cdot \overline{z-1} \cdot \overline{z-2} \cdot \overline{z-3}.$$

Et valores membrorum in unam summam collecti dant valorem to-
tius ut jam prodiit. Notandum Seriem infinitam conflatam ex Digni-
tatibus

INTRODUCTIO.

9

tatibus Indeterminatæ ascendentibus reduci non posse generaliter in aliam prædictæ formæ: nam quisque Coefficiens esset Series infinita. In Seriebus autem finitis, res succedit ut supra ostensum est.

Series etiam alterius formæ similiter reducuntur. Fingamus enim esse quantitatem quamvis quæsitam

$$T = \frac{A}{z} + \frac{B}{z.z+1} + \frac{C}{z.z+1.z+2} + \frac{D}{z.z+1.z+2.z+3} + \&c.$$

Dein si occasio postulet inquirere valorem ipsius T successivum, scribe $z+1$ pro z , & emerget valor successivus

$$T' = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z+1.z+2} + \frac{C}{z+1.z+2.z+3} + \frac{D}{z+1.z+2.z+3.z+4} + \&c.$$

Et ut hæc Series reducatur ad formam prioris, operor ad modum sequentem,

$$\begin{aligned} \frac{A}{z+1} & \dots = \frac{A}{z} - \frac{A}{z.z+1}, \\ \frac{B}{z+1.z+2} & \dots = * \cdot \frac{B}{z.z+1} - \frac{2B}{z.z+1.z+2}, \\ \frac{C}{z+1.z+2.z+3} & \dots = * \dots * \cdot \frac{C}{z.z+1.z+2} - \frac{3C}{z.z+1.z+2.z+3}, \\ \frac{D}{z+1.z+2.z+3.z+4} & = * \dots * \dots * \dots \frac{D}{z.z+1.z+2.z+3} + \&c. \end{aligned}$$

$$\text{Et habeo } T' = \frac{A}{z} + \frac{B-A}{z.z+1} + \frac{C-2B}{z.z+1.z+2} + \frac{D-3C}{z.z+1.z+2.z+3} + \&c.$$

Ubi nunc Denominatores iidem sunt atque in valore ipsius T; eaque de causa, instituere licet comparisonem Terminorum prout occasio postulat. Hujusmodi autem Operationes sic demonstrantur. Pone

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{z} - \frac{a}{z.z+1}, \text{ existente } a \text{ quantitate statim inveniendâ; tum}$$

ducendo in Denominatorem $z.z+1$, proveniet $z = z+1 - a$, sive delendo utrobique z , $0 = 1 - a$, & $a = 1$; quare substituendo unitatem

$$\text{pro } a, \text{ habebitur } \frac{1}{z+1} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z.z+1}. \text{ Similiter fingo } \frac{1}{z+1.z+2} =$$

$$\frac{1}{z.z+1} - \frac{a}{z.z+1.z+2}, \text{ \& ducendo in Denominatorem, erit } z = z+1 - a,$$

$2 - a$, five $a = 2$, atque exinde $\frac{1}{z+1.z+2} = \frac{1}{z.z+1} - \frac{2}{z.z+1.z+2}$.

Proponatur jam

$$\frac{A}{z+2} + \frac{B}{z+2.z+3} + \frac{C}{z+2.z+3.z+4} + \frac{D}{z+2.z+3.z+4.z+5} + \&c.$$

quam reducere oportet in aliam debitæ formæ. Instituaturs operatio ut mox ostensum, & invenies

$$\begin{aligned} \frac{A}{z+2} &= \frac{A}{z} - \frac{2A}{z.z+1} + \frac{2A}{z.z+1.z+2} \\ \frac{B}{z+2.z+3} &= * - \frac{B}{z.z+1} - \frac{4B}{z.z+1.z+2} + \frac{6B}{z.z+1.z+2.z+3} \\ \frac{C}{z+2.z+3.z+4} &= * - * - \frac{C}{z.z+2.z+3} - \frac{6C}{z.z+1.z+2.z+3} + \&c. \\ \frac{D}{z+2.z+3.z+4.z+5} &= * - * - * - \frac{D}{z.z+1.z+2.z+3} - \&c. \end{aligned}$$

Atque Series proposita, sub debita forma invenietur

$$\frac{A}{z} + \frac{B-2A}{z.z+1} + \frac{C-4B+2A}{z.z+1.z+2} + \frac{D-6C+6B}{z.z+1.z+2.z+3} + \&c.$$

Et hunc in modum instituetur reductio in aliis casibus. Si fractio reducenda sit $\frac{1}{z+1}$, erunt duo membra in ejusdem valore, ut in Ex-

emplo superiore. Si sit $\frac{1}{z+2}$, erunt tria, ut in Exemplo posteriore.

Et in genere in valore ipsius $\frac{1}{z+n}$ ad debitam formam reducti, numerus membrorum excedet numerum n unitate. Hic tamen suppono n esse integrum & affirmativum; nam si sit fractus vel negativus, valor fractionis $\frac{1}{z+n}$ excurreret in infinitum.

Regula autem generalis pro hujusmodi transmutationibus ea est quæ sequitur. Duc Terminos hujus Progressionis $n, 1+n, 2+n, 3+n, \&c.$ in se continuò, & Facta disponantur in Tabula sequente pro ratione Dignitatum numeri n , Coefficientibus tantum reservatis, & emerget

Tabula

INTRODUCTIO.

II

Tabula posterior.

I									
I	I								
2	3	I							
6	11	6	I						
24	50	35	10	I					
120	274	225	85	15	I				
720	1764	1624	735	175	21	I			
5040	13068	13132	6769	1960	322	28	I		
40320	109584	105056	67284	22449	4536	546	36	I	
&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.

Deinde sumendo Coefficientes ex columnis descendentibus, obtinebis valores Dignitatum,

$$\frac{1}{z^1} = \frac{1}{z \cdot z + 1} + \frac{1}{z \cdot z + 1 \cdot z + 2} + \frac{2}{z \cdot z + 1 \cdot z + 2 \cdot z + 3} + \frac{6}{z \cdot z + 1 \cdot z + 2 \cdot z + 3 \cdot z + 4} + \&c.$$

$$\frac{1}{z^2} = \frac{1}{z \cdot z + 1 \cdot z + 2} + \frac{3}{z \cdot z + 1 \cdot z + 2 \cdot z + 3} + \frac{11}{z \cdot z + 1 \cdot z + 2 \cdot z + 3 \cdot z + 4} + \&c.$$

$$\frac{1}{z^3} = \frac{1}{z \cdot z + 1 \cdot z + 2 \cdot z + 3} + \frac{6}{z \cdot z + 1 \cdot z + 2 \cdot z + 3} + \frac{35}{z \cdot z + 1 \cdot z + 2 \cdot z + 3} + \frac{225}{z \cdot z + 1 \cdot z + 2 \cdot z + 3} + \&c.$$

Et ita porro in reliquis. Adeo ut habitâ Serie ex dignitatibus compositâ, ea semper reduci possit in aliam formæ desideratæ, ope hujus Tabulæ.

Vel propositâ Serie $\frac{A}{z^2} + \frac{B}{z^3} + \frac{C}{z^4} + \frac{E}{z^5} + \&c.$ sume Coefficientes ex columnis transversis, & ponantur.

$$a = A,$$

$$b = A + B,$$

$$c = 2A + 3B + C,$$

$$d = 6A + 11B + 6C + D,$$

$$e = 24A + 50B + 35C + 10D + E,$$

$$f = 120A + 274B + 225C + 85D + 15E + F,$$

$$\&c.$$

Atque

Atque Series ex Dignitatibus composita transmutabitur in sequentem debitæ formæ

$$\frac{a}{z.z+1} + \frac{b}{z.z+1.z+2} + \frac{c}{z.z+1.z+2.z+3} + \frac{d}{z.z+1.z+2.z+3.z+4} + \&c.$$

Proponatur nunc Fractio $\frac{1}{z.z+n.z}$, primùm ope Divisionis resolvo eam in Seriem vulgarem $\frac{1}{z^2} - \frac{n}{z^3} + \frac{n^2}{z^4} - \frac{n^3}{z^5} + \frac{n^4}{z^6} - \&c.$ unde est

$A=1$, $B=-n$, $C=+n^2$, $D=-n^3$, $E=+n^4$, $\&c.$ & hisce valoribus substitutis, emergent $a=1$, $b=1-n$, $c=2-3n+n^2$, $d=6-11n+6n^2-n^3$, $\&c.$ atque adeo

$$\frac{1}{z.z+n.z} = \frac{1}{z.z+1} + \frac{1-n}{z.z+1.z+2} + \frac{2-3n+n^2}{z.z+1.z+2.z+3} + \frac{6-11n+6n^2-n^3}{z.z+1.z+2.z+3.z+4} + \&c.$$

$$\text{Hoc est } \frac{1}{z.z+n.z} = \frac{1}{z.z+1} + \frac{1-n}{z+2} A + \frac{2-n}{z+3} B + \frac{3-n}{z+4} C + \frac{4-n}{z+5} D + \&c.$$

Ubi quantitates A , B , C , D , $\&c.$ jam designant Terminos hujus Seriei more *Newtoniano*. Et patet Seriem abrumpere quotiescunque est n integer & affirmativus. In aliis Exemplis denotet etiam z minimum Factorem in Denominatore, & Series semper abrumpet hac me-

thodo ubi ejus natura tulerit. Ut si Fractio sit $\frac{1}{x.x-3.x+2}$, pono $z=x-3$, minimo utique trium Factorum; tum erit $x=z+3$, & $x+2=z+5$: Atque evadet Fractio $\frac{1}{z.z+3.z+5}$, five multiplica-

one facta, $\frac{1}{z^3+8z^2+15z}$, quæ dividendo fit $\frac{1}{z^3} - \frac{8}{z^4} + \frac{49}{z^5} - \frac{272}{z^6} + \frac{1441}{z^7} - \frac{7448}{z^8} + \frac{37969}{z^9} - \&c.$ Unde est $A=0$, $B=1$, $C=-8$,

$D=+49$, $E=-272$, $F=+1441$, $G=-7448$, $\&c.$ Et exinde prodeunt $a=0$, $b=1$, $c=-5$, $d=12$, $e=-12$; at f & reliquæ sunt nihil: & per consequens abrumpit Series, existente accuratè

$$\frac{1}{z.z+3.z+5} = \frac{1}{z.z+1.z+2} \text{ in } 1 - \frac{5}{z+3} + \frac{12}{z+3.z+4} - \frac{12}{z+3.z+4.z+5}.$$

In fractione quavis $\frac{1}{z.z+a.z+b.z+c.\&c.}$ sit z minimus Factorum,

adeo, ut a , b , c , $\&c.$ sint affirmativi, & si sint quoque integri, Series terminabitur, aliàs excurreret in infinitum. Ubi vero Series abrumpit, eadem inveniri potest plurimis modis idque elegantius quàm per regulam superiorem generalem: quippe a concinnitate alienissimum est, primo

Primo reducere Fractionem finitam in Seriem infinitam, ut postea ejus valor habeatur in Terminis numero finitis: quod nos hîc fecimus ut regula generalis illustraretur, non ut doceretur optima methodus quando Series abruptit.

Si in Tabula priore excerptantur numeri ex columnis ascendentibus, & ponantur

$$\begin{aligned} a &= A, \\ b &= B - A, \\ c &= C - 3B + A, \\ d &= D - 6C + 7B - A, \\ e &= E - 10D + 25C - 15B + A, \\ f &= F - 15E + 65D - 90C + 31B - A, \\ &\quad \&c. \end{aligned}$$

Tum Series hujus formæ $\frac{A}{z \cdot z + 1} + \frac{B}{z \cdot z + 1 \cdot z + 2} + \frac{C}{z \cdot z + 1 \cdot z + 2 \cdot z + 3} + \&c.$

migrabit in hanc $\frac{a}{z^1} + \frac{b}{z^3} + \frac{c}{z^4} + \frac{d}{z^5} + \&c.$ quæ ex Dignitatibus componitur.

In hisce Transmutationibus nullam habuimus rationem Termini $\frac{A}{z}$, quoniam is absque ulla Transmutatione ambigüè pertinet tam ad Seriem Dignitatum quam ad eam Factorum.



INTRODUCTION

The purpose of this report is to provide a comprehensive overview of the current state of research in the field of artificial intelligence. This report is intended for a general audience and is not intended to be a technical treatise. The report is organized into several sections, each of which will be discussed in detail below.

1. The history of artificial intelligence
2. The current state of research in artificial intelligence
3. The future of artificial intelligence
4. The ethical implications of artificial intelligence
5. The social implications of artificial intelligence

The first section of the report, "The history of artificial intelligence," provides a brief overview of the field's development from its early beginnings to the present day. It discusses the contributions of various researchers and the evolution of the field's theoretical and practical foundations.

The second section, "The current state of research in artificial intelligence," provides a detailed overview of the most recent advances in the field. It discusses the latest research in areas such as machine learning, natural language processing, and computer vision.



The third section, "The future of artificial intelligence," discusses the potential future developments in the field. It explores the possibilities of creating more intelligent machines and the potential for artificial intelligence to revolutionize various aspects of human life.

The fourth and fifth sections, "The ethical implications of artificial intelligence" and "The social implications of artificial intelligence," discuss the potential risks and benefits of artificial intelligence. They explore the ethical challenges posed by the development of intelligent machines and the potential for artificial intelligence to impact society in various ways.



P A R S P R I M A.

D E

Summatione Serierum.



N hac parte prima conatus sum abbreviare computos in Quadratura Curvarum, & in Problematibus etiam difficili-
 oribus, idque perveniendo ad valores Serierum infi-
 nitarum magis expedite quàm per simplicem additionem
 Terminorum ut vulgò fit. Hæc quidem in citò con-
 vergentibus abunde rem conficit, neque ulteriore opus
 est artificio: attamen ubi lentè convergunt immensus plerumque labor
 requiritur, & eo quidem major quo minor est convergentia; quod
 si lentissimè approximent, evadunt penitus intractabiles. Etenim no-
 tissimum est nonnunquam opus esse ultra mille numero Terminos,
 ut summa habeatur justa ad duas tresve figuras. Monstrabimus ergo in
 sequentibus methodum expeditam transmutandi eas omnium lentissime
 convergentes in alias celerrime approximantes; ex quibus scilicet sum-
 mæ supputari queunt minimo labore ad plurima figurarum loca.

Abrumpent quidem Series transmutatæ ubi summandæ sunt summa-
 biles; eoque in casu transmutatio evadet summatio. Sed de Seriebus
 summabilibus minus sollicitus sum easque obiter tantum attingo, ut-
 pote quæ in Quadraturis raro prodire solent. Hic enim non operam
 collocavi in eruendis Seriebus inutilibus quæ per obvia Theoremata
 sunt

sunt summabiles, sed in eruendis Theorematis per quæ Series utiles expedite possint summari ad tot figurarum loca quot usus quicunque requirunt.

De Seriebus simplicioribus.

Non tantum Seriei convergentia sed & simplicitas plurimum confert ad contrahendos calculos. Quapropter priusquam ad Transmutationes accedamus, sciendum est Series *Newtonianas* in Tractatu de Quadratura Curvarum, non solum abrumpere ubi rei natura tulerit, sed & esse omnium simplicissimas, ubi excurrunt in infinitum, atque eapropter præferendas esse iis quæ inveniuntur methodo vulgari, scilicet reducendo Ordinatas in Series convergentes, ut exinde computentur Areæ.

Sit $x^{\theta-1} \times \overline{e + fx^{\eta}}^{\lambda-1}$ Ordinata Curvæ, in qua x est Abscissa, e & f Coefficientes, atque $\theta-1$, $\lambda-1$, & η indices Dignitatum: pone $r = \frac{\theta+1}{\eta}$, $s = \frac{\theta+\lambda}{\eta}$, & juxta *Newtonum* Area erit

$$\frac{x^{\theta}}{\theta e} \times \overline{e + fx^{\eta}}^{\lambda} - \frac{s}{r} A \frac{fx^{\eta}}{e} - \frac{s+1}{r+1} B \frac{fx^{\eta}}{e} - \frac{s+2}{r+2} C \frac{fx^{\eta}}{e} - \frac{s+3}{r+3} D \frac{fx^{\eta}}{e} - \&c.$$

Ubi A, B, C, D, &c. designant Terminos, quemque in suo ordine ab initio: scilicet est $A = \frac{x^{\theta}}{\theta e} \times \overline{e + fx^{\eta}}^{\lambda}$, $B = -\frac{s}{r} A \frac{fx^{\eta}}{e}$, $C = -\frac{s+1}{r+1} B \frac{fx^{\eta}}{e}$, & sic deinceps. Proponatur jam inventio Arcûs ex dato Sinu recto x ,

vel quod perinde est, Quadratura Curvæ cujus Ordinata est $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$:

hæc ad debitam formam reducta fit $x^0 \times \overline{1-x^2}^{-\frac{1}{2}}$, quæ comparata cum Ordinata generali dat $e=1$, $f=-1$, $\eta=2$, $\theta-1=0$, $\lambda-1=-\frac{1}{2}$; adeoque $\theta=1$, $\lambda=\frac{1}{2}$: et exinde $r=\frac{1}{2}$, $s=1$; quibus valoribus in Theoremate substitutis, oritur pro Arcu Series

$$x \sqrt{1-x^2} + \frac{2}{3} A x^3 + \frac{4}{5} B x^5 + \frac{6}{7} C x^7 + \frac{8}{9} D x^9 + \frac{10}{11} E x^{11} + \&c.$$

At si Ordinata proposita prius resolvatur in Seriem per Theorema *Newtoni* pro evolvendo Binomio, dein capiatur Fluens cujusque Terminum, prodibit pro eodem Arcu Series

$$x + \frac{1 \times 1}{2 \times 3} A x^3 + \frac{3 \times 3}{4 \times 5} B x^5 + \frac{5 \times 5}{6 \times 7} C x^7 + \frac{7 \times 7}{8 \times 9} D x^9 + \frac{9 \times 9}{10 \times 11} E x^{11} + \&c.$$

Unde patet priorem longe simpliciore esse & proinde facilius continuari in infinitum. Exempli gratiâ, si Arcus quæsitus sit octava pars totius Circum-

Circumferentiæ, ejus Sinus x erit æqualis $\sqrt{\frac{1}{2}}$, quo substituto, evadet Series

$$\text{Prior } \frac{1}{2} + \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{7}C + \frac{4}{9}D + \frac{1}{11}E + \&c.$$

$$\text{Posterior } \sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{1}{12}A + \frac{1}{24}B + \frac{1}{84}C + \frac{49}{144}D + \frac{81}{224}E + \&c.$$

Quo in casu prior duplici de causa est præferenda, tum quoniam per Factores simpliciores producitur, tum quia libera est a numero furdo qui reperitur in posteriore. Attamen ubi x est quantitas rationalis, & simul $x\sqrt{1-xx}$ irrationalis, Series posterior eligenda est, modo sit x magnitudinis usque adeo contemnendæ quæ efficiat Seriem celerrime convergentem; hac enim ratione evitatur extractio Radicis quadratæ. Insuper si sit $x = 1$, necesse habemus recurrere ad secundam, quoniam in illo casu evanescit quantitas $\sqrt{1-xx}$, in quam prima multiplicatur.

De Seriebus quæ celerius convergunt.

Ubi quantitas indeterminata, crescente eâ quæ desideratur, cito evadit prægrandis, & tandem infinite magna; Termini Seriei ex illa compositæ erunt alternatim negativi & affirmativi, & approximabunt lentius quam ubi indeterminata ultra datam magnitudinem crescere nequit. Ut si quæretur Area vel Arcus circularis, melius est adhibere Sinum rectum qui nequit esse major Radio, quam Tangentem quæ cito excrescit in immensam longitudinem; ut olim observavit *Newtonus*. Et e contra præferendæ sunt Tangentes in Hyperbola, utpote quæ datam magnitudinem superare nequeunt, sed continentur intra determinatos limites, eosque satis arctos. Sed quæ hic diximus, non impediunt quo minus Area vel Arcus, magnitudinis mediocris vel contemnendæ, possit exquiri prout cuique visum fuerit: nam differentia tantum est notabilis in iis casibus in quibus quantitates quæsitæ sunt magnæ. Atque Series quarum Termini sunt per vices negativi & affirmativi sunt magis tractabiles quæ præterea, ubi de Summatione agitur. Quæ autem hic dicta sunt de Cl. binomialibus, obtinent quoque in iis superiorum nominum.

Verum quidem est Series celeriter convergentes multifariam inveniri posse, adhibita Methodo differentiali *Newtoniana*. Sed quo magis convergunt eo magis solent esse compositæ: quapropter præfero simpliciores etiam si lentius convergentes.

De Summis successivis.

Per Summam successivam intelligo quantitatem quæ succedit Summæ omnium Terminorum, quando Termini subsequentes deveniunt in loca antecedentium. Ut si Summa sit $T + T' + T'' + T''' + T^{iv} + T^v + \&c.$ scribe Terminos posteriores pro prioribus, & habebis Summam successivam $T' + T'' + T''' + T^{iv} + T^v + \&c.$ in qua denuo si substituantur Termini consequentes pro antecedentibus, proveniet Summa $T'' + T''' + T^{iv} + T^v + T^{vi} + \&c.$ quæ succedit novissimæ; & sic deinceps.

Hinc si $S, S', S'', S''', \&c.$ denotent Summas successivas, erunt

$$S = T + T' + T'' + T''' + T^{iv} + \&c.$$

$$S' = - - T' + T'' + T''' + T^{iv} + \&c.$$

$$S'' = - - - - T'' + T''' + T^{iv} + \&c.$$

$$S''' = - - - - - T''' + T^{iv} + \&c.$$

Hoc est, si a Serie quavis infinita subducatur primus Terminus, & a residua subducatur etiam primus Terminus, dein ab ea quæ relinquitur rursus subducatur primus Terminus, & sic ad libitum; Series hoc modo gradatim mulctatæ primis Terminis, erunt Summæ successivæ; hoc est,

$$S' = S - T, S'' = S' - T', S''' = S'' - T'', \&c.$$

$$\text{Vel } S' = S - T,$$

$$S'' = S - T - T',$$

$$S''' = S - T - T' - T'',$$

$$S^{iv} = S - T - T' - T'' = T''',$$

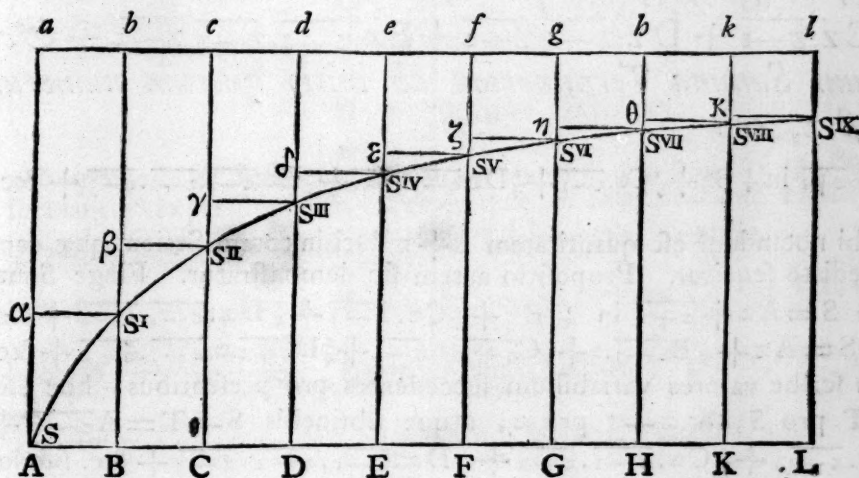
&c.

Hic locuti sumus de Summis Terminorum omnium in infinitum, quæ incipiunt ad datum quemvis Terminum; nam quicumque Terminus sit T , S erit Summa ejus & omnium sequentium, item S' erit Summa ipsius T' & omnium reliquorum. Hæc quidem obtinent ubi agitur de Summa Terminorum numero infinitorum: Attamen ubi agitur de Summa Terminorum quorum numerus est finitus, S erit Summa Terminorum omnium ab initio ad datum quemvis Terminum T , & S' erit Summa eorundem Terminorum dempto T , atque S'' erit Summa eorundem demptis duobus T, T' , & sic in reliquis.

Hinc in Summatione Terminorum a dato quovis Terminum ad infinitum, si z sit longitudo Abscissæ quæ correspondit Summæ S ; tum $z+1, z+2, z+3, \&c.$ erunt longitudines ejusdem respectivo correspondentes Summis successivis $S', S'', S''', \&c.$ Et e contra in Summatione

matione Terminorum a dato quovis usque ad initium Seriei, longitudines $z-1$, $z-2$, $z-3$, &c. respondebunt Summis S' , S'' , S''' , &c. dummodo ipsi S respondeat Abscissa z . Nam in primo casu distantiae Summarum ab initio perpetuo increscunt incremento Abscissæ, decrescuntque eodem decremento in posteriore.

Sit S Curva quævis cujus Asymptotos est ab , eique parallela Abscissa AB . Dividatur Abscissa in partes innumeras inter se æquales AB , BC , CD , &c. Et a punctis divisionum A , B , C , D , &c. erigantur perpendiculara ad Asymptoton, decussantia Curvam in punctis S , S' , S'' , &c. Asymptoton vero in a , b , c , &c. A punctis S' , S'' , S''' , &c. ad Ordi-



natas proxime antecedentes ducantur $S'\alpha$, $S''\beta$, $S'''\gamma$, $SIV\delta$, &c. parallelæ Abscissæ; adeo ut $S\alpha$, $S'\beta$, $S''\gamma$, $S'''\delta$, &c. sint differentiæ Ordinarum tam earum quæ extenduntur a Curva ad Asymptoton, quam illarum quæ a Curva ad Abscissam porriguntur. Igitur Ordinatarum interceptæ inter Curvam & Asymptoton exponent Summas, & differentiæ pergendo ab iisdem in infinitum exponent Terminos. Hoc est, si e SIV designet Summam, succedentes erunt f SV , g SVI , h $SVII$, &c. quarum differentiæ e SIV , z SV , η SVI , &c. in infinitum sunt Termini quorum Summa est e SIV . Et similiter si E SIV , D S''' , C S'' , &c. designent Summas successivas, quarum prima est E SIV , differentiæ antecedentes δ S''' , γ S'' , &c. exponent Terminos numero finitos pergentes ab Ordinata E SIV usque ad initium Seriei. Summatio igitur Serierum
redu-

reducitur ad inventionem Ordinarum ex datis earum Differentiis. Sed notandum oportere Summam ultimam esse nihil in utroque casu, quod semper fiet quando Curva transit per punctum A in Abscissa, & simul habet *ab* pro Asymptoto. Hæc cautio adhibenda est ut Summæ investigandæ per methodos tradendas, sint veræ, correctione minime indigentes, ut sæpiissime fit in quadratura Curvarum.

PROPOSITIO I.

*Si Termini alicujus Seriei formentur scribendo numeros
1, 2, 3, 4, 5, &c. pro z, in Quantitate $A + Bz +$
 $Cz.z-1 + Dz.z-1.z-2 + Ez.z-1.z-2.z-3 + \&c.$
tum Summa Terminorum ab initio quorum numerus
est z, erit*

$$Az + \overline{z+1} \text{ in } \frac{1}{2}Bz + \frac{1}{2}Cz, \overline{x-1} + \frac{1}{4}Dz, \overline{x-1}, \overline{x-2} + \frac{1}{5}Ez, \overline{x-1}, \overline{x-2}, \overline{x-3} + \dots$$

Ubi notandum est quantitatem $z+1$ duci in totam Seriem quæ eam immediate sequitur. Propositio autem fici demonstratur. Finge summam $S = Az + \frac{1}{z+1}$ in $\frac{1}{2}Bz + \frac{1}{3}Cz.z^{-1} + \frac{1}{4}Dz.z^{-1}.z^{-2} + \&c.$ five $S = Az + \frac{1}{2}Bz + \frac{1}{3}Cz.z^{-1} + \frac{1}{4}Dz.z^{-1}.z^{-2} + \&c.$ Dein scribe valores variabilium succedentes pro presentibus; hoc est, $S-T$ pro S ; & $z-1$ pro z ; atque obtinebis $S-T = A.z^{-1} + \frac{1}{2}Bz.z^{-1} + \frac{1}{3}Cz.z^{-1}.z^{-2} + \frac{1}{4}Dz.z^{-1}.z^{-2}.z^{-3} + \&c.$ subdu- cito nunc hanc Æquationem de priore, & manebit $T = A + Bz + Cz.z^{-1} + Dz.z^{-1}.z^{-2} + \&c.$ Unde e contra si detur hic valor Termini ut in Propositione, Summa erit ea quæ assignata est. Insuper hæc Summa evadit nihil quando est z nihil: adeoque constat Theorema. Q. E. D.

EXEMPLUM I.

Detur Series numerorum naturalium 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. hi for-
mantur scribendo 1, 2, 3, &c. pro z , in ipsa quantitate z , quam ita-
que comparans cum Termino in Theoremate, erit $A=0$, $B=1$, &
 C, D, E , & sequentes nihil; quibus valoribus substitutis prodit Sum-
ma $\frac{z}{z+1}$ in $\frac{1}{2} z$, five $\frac{zz+z}{2}$ pro aggregato tot Terminorum Seriei

propo-

Summatio Serierum.

21

propositæ quot sunt unitates in z . Ut si sit $z=6$, proveniet $\frac{36+6}{2}=21$ pro Summa primorum sex Terminorum.

EXEMPLUM II.

Detur jam Series numerorum imparium 1, 3, 5, 7, 9, 11, &c. hi formantur scribendo 1, 2, 3, 4, &c. in Quantitate $2z-1$, id est, $-1+2z$, quæ comparata cum valore Termini generali, dat $A=-1$, $B=2$, $C, D, E, \&c.$ nihil; quibus scriptis in Summa, emergit $-z + \frac{z}{z+1}$ in $\frac{2z}{2}$, vel zz pro aggregato tot Terminorum quot numerat z . Atque ita quidem se res habet in casu præfente, nam Summæ successivæ sunt Quadrata numerorum naturalium.

EXEMPLUM III.

Summanda sit Series Quadratorum 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, &c. quæ formantur expressione zz . Per ea quæ in Introductione explicantur, quantitas zz reducta ad formam Theorematis, evadit $z + \frac{z \cdot z - 1}{z+1}$; adeoque $A=0$, $B=1$, $C=1$, & inde fit Summa $\frac{z}{z+1}$ in $\frac{z}{2} + \frac{z \cdot z - 1}{3}$, hoc est $\frac{z \cdot z + 1 \cdot z + 1}{6}$. Exempli causâ, scribe 7 pro z , & habebis $\frac{7 \cdot 8 \cdot 15}{6} = 140$, quod est aggregatum septem Terminorum.

EXEMPLUM IV.

Proponantur nunc Quadrata numerorum imparium 1, 9, 25, 49, 81, 121, 169, &c. eadem formantur scribendo 1, 2, 3, 4, &c. successive in expressione $1+4zz-4z$, quæ sic scripta $1+4z \cdot \frac{z-1}{z+1}$, dat $A=1$, $B=0$, $C=4$, $D, E, \&c.$ nihil: & hisce substitutis, prodit Summa $z + \frac{z}{z+1}$ in $\frac{4}{3}z \cdot \frac{z-1}{z+1}$, sive $\frac{4z^3-z}{3}$.

EXEMPLUM V.

Si dentur Cubi 1, 8, 27, 64, 125, 216, &c. quos assignat z^3 , reducatur z^3 ad debitam formam $z + 3z \cdot \frac{z-1}{z+1} + z \cdot \frac{z-1 \cdot z-2}{z+1}$; eritque $A=0$, $B=1$, $C=3$, $D=1$, reliquæque erunt nihil; & propterea
G
est

est Summa $\frac{z}{z+1}$ in $\frac{1}{2}z + z \cdot \frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{2}z \cdot \frac{z-1}{z+1} \cdot \frac{z-2}{z+1}$, quæ concinnata evadit $\frac{z^2}{4} \times \frac{z+1}{1}$. Et hinc constat Summas horum Cuborum esse Quadrata numerorum 1, 3, 6, 10, 15, &c. scilicet Triangularem.

SCHOLION.

Hujusmodi Series facilius summantur per Terminorum Differentias: designent enim A, A₂, A₃, &c. Seriem summandam; collige Terminorum differentias primas B, B₂, B₃, &c. secundas C, C₂, C₃, &c. tertias D, D₂, &c. & sic porro usque dum perventum fuerit ad ultimam quæ hic est E: & Summa Terminorum cujus numerus est z, erit

$$A \frac{z}{1} + B \frac{z}{1} \times \frac{z-1}{2} + C \frac{z}{1} \times \frac{z-1}{2} \times \frac{z-2}{3} + D \frac{z}{1} \times \frac{z-1}{2} \times \frac{z-2}{3} \times \frac{z-3}{4} + \text{\&c.}$$

Sed notandum est quod differentiæ fumi debeant auferendo priores de posterioribus, hoc est, ponendo B = A₂ - A, B₂ = A₃ - A₂, &c. tum C = B₂ - B, &c. Hujus autem demonstratio pendet ex methodo differentiali Newtoniana.

Proponantur Series 1, -1, 0, 8, 27, 61, 114, 119, &c. & collectis differentis ad modum supra expositum, invenietur A = 1, B = -2, C = 3, D = 4, reliquæ autem nihil sunt, adeoque evadit summa

$$\frac{z}{1} - 2 \times \frac{z}{1} \times \frac{z-1}{2} + 3 \times \frac{z}{1} \times \frac{z-1}{2} \times \frac{z-2}{3} + 4 \times \frac{z}{1} \times \frac{z-1}{2} \times \frac{z-2}{3} \times \frac{z-3}{4},$$

quæ in ordinem redacta fit $\frac{z^3 - 3z^2 + 2z + 2}{6}$.

Series autem formatur scribendo 0, 1, 2, 3, 4, &c. in quantitate $\frac{4z^3 - 3z^2 - 13z + 6}{6}$.

PROPO-

PROPOSITIO II.

Si Termini cujuscunque Seriei formentur scribendo numeros quosvis unitate differentes in Quantitate

$$\frac{A}{z.z+1} + \frac{B}{z.z+1.z+2} + \frac{C}{z.z+1.z+2.z+3} + \frac{D}{z.z+1.z+2.z+3.z+4} +$$

&c. Summa omnium Terminorum in infinitum, incipiens ad datum quemlibet Terminum erit

$$\frac{A}{z} + \frac{B}{2z.z+1} + \frac{C}{3z.z+1.z+2} + \frac{D}{4z.z+1.z+2.z+3} + \&c.$$

Pone Summam S =

$$\frac{A}{z} + \frac{B}{2z.z+1} + \frac{C}{3z.z+1.z+2} + \frac{D}{4z.z+1.z+2.z+3} + \&c.$$

Tum scribe valores ipsorum S & z, consequentes pro antecedentibus, hoc est S—T pro S, & z+1 pro z, quoniam jam agitur de Terminis numero infinitis: & proveniet S—T =

$$\frac{A}{z+1} + \frac{B}{2.z+1.z+2} + \frac{C}{3.z+1.z+2.z+3} + \frac{D}{4.z+1.z+2.z+3.z+4} + \&c. \text{ Hæc } \text{Æquatio sub-}$$

$$\text{ducta de superiore, relinquit } T = \frac{A}{z.z+1} + \frac{B}{z.z+1.z+2} +$$

$$\frac{C}{z.z+1.z+2.z+3} + \frac{D}{z.z+1.z+2.z+3.z+4} + \&c. \text{ Unde è contra si detur hic Terminus, Summa erit ea quæ in Propositione assignatur. Q. E. D.}$$

Corollarium 1. Si Terminus sit $\frac{p}{z.z+1.z+2.z+3.z+4.\&c.}$, rejice ultimum Factorem, dein divide residuum per numerum Factorum qui relinquuntur, atque habebis Summam Terminorum. Sit Terminus $\frac{A}{z.z+1}$; rejice ultimum Factorem z+1, & manebit $\frac{A}{z}$; quumque unicus sit Factor residuus z, erit $\frac{A}{z}$ Summa omnium Terminorum.

Sic

Sit jam Terminus constans ex tribus Factoribus $\frac{B}{z.z+1.z+2}$, rejice ultimum Factorem $z+2$, & restabit $\frac{B}{z.z+1}$, quæ divisa per 2, numerum utique Factorum qui relinquuntur, exhibet $\frac{B}{2z.z+1}$ pro Summa.

Similiter si ex Termino $\frac{C}{z.z+1.z+2.z+3}$ ex quatuor Factoribus conflato, rejiciatur ultimus $z+3$, & residuum dividatur per 3, obtinebitur Summa $\frac{C}{3z.z+1.z+2}$.

Si Terminus sit $\frac{A}{z}$, rejice Factorem z , & quoniam nullus restat, divide A per Nihil, & habebis pro Summâ Quantitatem infinite magnam, uti notum est. Et hac de re primus quod sciam egit D. Taylor in Methodo Incrementorum. Eadem etiam fusius & elegantissime traditur a D. Nicol in Actis Academiæ Regiæ Parisiensis.

Corollarium 2. Per ea quæ hac super materia habentur in Introductione, constat Terminum quempiam $\frac{A}{z.z+a.z+b.z+c. \&c.}$ resolvi semper posse in Terminos duos forte aut plures summabiles & numero finitos, quando $a, b, c, \&c.$ sunt numeri integri; in illo igitur casu Series summabitur. Ut si Terminus sit $\frac{1}{z.z+3}$, idem resolvitur in tres

Terminos summabiles $\frac{1}{z.z+1} - \frac{2}{z.z+1.z+2} + \frac{2}{z.z+1.z+2.z+3}$. Unde per Corollarium præcedens, erit Summa $\frac{1}{z} - \frac{1}{z.z+1} + \frac{2}{3z.z+1.z+2}$,

quæ simul juncta sunt $\frac{3z^2+6z+2}{3z^3+9z^2+6z}$. Et similiter si Terminus sit hujus formæ $\frac{a+bz^2+cz^3+dz^4+\&c.}{z.z+a.z+b.z+c.z+d. \&c.}$ Series summabitur, dummodo $a, b, c, d, \&c.$ sint integri, & numerus Factorum in Denominatore, ad minimum binario excedat altissimum ipsius z dimensionem in Numeratore. Sed excipio casus in quibus duo aut plures Factores in Denominatore sibi invicem æquantur; in illis Series non sunt summabiles.

EXEMPLUM

EXEMPLUM I.

Proponatur Series fummanda $\frac{1}{1 \cdot 4 \cdot 7} + \frac{1}{4 \cdot 7 \cdot 10} + \frac{1}{7 \cdot 10 \cdot 13} +$
 $\frac{1}{10 \cdot 13 \cdot 16} + \frac{1}{13 \cdot 16 \cdot 19} + \&c.$ Termini hujus Seriei assignantur quanti-
 tate $\frac{1}{3z \cdot 3z + 3 \cdot 3z + 6}$, uti patebit scribendo pro z successive $\frac{1}{3}, 1\frac{1}{3},$

$2\frac{1}{3}, 3\frac{1}{3}, \&c.$ id est, hac $\frac{1}{27z \cdot z + 1 \cdot z + 2}$; unde fit Summa $\frac{1}{54z \cdot z + 1}$.
 Nam in eadem scribendo pro z valorem suum primum $\frac{1}{3}$, prodibit $\frac{1}{14}$
 pro Summa totius Seriei. Si scribatur pro z valor suus secundus $1\frac{1}{3}$, pro-
 dabit $\frac{1}{14}$ pro Summa totius Seriei dempto primo Termino. Si pro z
 scribatur valor suus tertius $2\frac{1}{3}$, prodibit $\frac{1}{14}$ pro Summa totius Se-
 riei demptis primis duobus Terminis. Et sic in infinitum.

EXEMPLUM II.

Proponatur Series $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 6} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \&c.$ Termi-
 ni hujus assignantur quantitate $\frac{1}{z \cdot z + 3}$, in qua oportet scribi 1, 2, 3,

4, &c. successive pro z . Quantitas autem $\frac{1}{z \cdot z + 3}$ reducitur in tres Ter-
 minos summabiles nempe $\frac{1}{z \cdot z + 1} - \frac{2}{z \cdot z + 1 \cdot z + 2} + \frac{2}{z \cdot z + 1 \cdot z + 2 \cdot z + 3}$;

Unde erit Summa $\frac{1}{z} - \frac{1}{z \cdot z + 1} + \frac{2}{3z \cdot z + 1 \cdot z + 2}$, five $\frac{3z^2 + 6z + 2}{3z \cdot z + 1 \cdot z + 2}$.

Jam si vis aggregatum omnium omnino Terminorum, substitue in Sum-
 ma unitatem pro z , & obtinebis $\frac{3+6+2}{3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3}$, id est $\frac{1}{12}$ pro valore Se-
 riei propositæ.

EXEMPLUM III.

Detur jam Series $\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{4}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{9}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{16}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} +$
 $\frac{25}{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} + \&c.$ ubi Numeratores sunt Quadrata numerorum naturalium;

H

Terminus

Terminus quilibet in genere assignabitur expressione $\frac{zz-2z+1}{z.z+1.z+2.z+3}$ existentibus 2, 3, 4, 5, &c. valoribus indeterminatæ successivis. Et quantitas illa resolvitur in tres Terminos summabiles scilicet $\frac{1}{z.z+1} - \frac{7}{2z.z+1} + \frac{16}{3z.z+1.z+2}$, hoc est $\frac{6z^3-3z+2}{6.z.z+1.z+2}$, in qua si substituas 2 pro z , habebis $\frac{5}{7}$ pro valore Seriei.

EXEMPLUM IV.

Quærat^r valor Seriei $\frac{1}{1.2.3.4.5} + \frac{27}{2.3.4.5.6} + \frac{125}{3.4.5.6.7} + \frac{343}{4.5.6.7.8} +$ &c. ubi Numeratores sunt Cubi numerorum imparium 1, 3, 5, 7, &c. Pōitis jam 1, 2, 3, 4, 5, &c. valoribus ipsius z successivis, Termini assignabuntur per expressionem $\frac{8z^3-12z^2+6z-1}{z.z+1.z+2.z+3.z+4}$, quæ resolvitur in $\frac{8}{z.z+1} - \frac{84}{z.z+1.z+2} + \frac{386}{z.z+1.z+2.z+3} - \frac{729}{z.z+1.z+2.z+3.z+4}$. Igitur est Summa $\frac{8}{z} - \frac{84}{2z.z+1} + \frac{386}{3z.z+1.z+2} - \frac{729}{4z.z+1.z+2.z+3}$, hoc est, $\frac{96z^3+72z^2+80z-3}{12z.z+1.z+2.z+3}$; in qua si scribas primum valorem ipsius z , id est, unitatem pro z , invenies $\frac{5}{14}$ esse valorem Seriei.

EXEMPLUM V.

Proponatur Series $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{7.8} + \frac{1}{9.10} +$ &c. quam invenit Vicecomes Brounker pro Quadratura Hyperbolæ; Terminus quivis in genere assignatur per expressionem $\frac{1}{4z.z+\frac{1}{2}}$, ubi valores ipsius z sunt $\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}$, &c. Et quantitas reducta ad formam summabilem evadit

$$\frac{1}{4z.z+\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{4z \cdot z + 1} + \frac{1}{8z \cdot z + 1 \cdot z + 2} + \frac{1 \cdot 3}{16z \cdot z + 1 \cdot z + 2 \cdot z + 3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{32z \cdot z + 1 \cdot z + 2 \cdot z + 3 \cdot z + 4} + \&c.$$

Excurrit quippe in Seriem infinitam propterea quod differentia Factorum est numerus fractus in expressione assignante Terminos; hoc utique indicium est Seriem non esse summabilem. Regrediendo autem à Termino ad Summam, habebitur

$$\frac{1}{4z} + \frac{1}{16z \cdot z + 1} + \frac{1 \cdot 3}{48z \cdot z + 1 \cdot z + 2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{128z \cdot z + 1 \cdot z + 2 \cdot z + 3} + \&c.$$

Quæ est Series eo citius convergens quo major est z . Sed ob facilitatem computum pone $A = \frac{1}{4z}$,

$$B = \frac{A}{2z + 2}, C = \frac{3B}{2z + 4}, D = \frac{5C}{2z + 6}, E = \frac{7D}{2z + 8}, F = \frac{9E}{2z + 10},$$

&c. atque erit Summa, $A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{3}C + \frac{1}{4}D + \frac{1}{5}E + \&c.$ In qua si pro z substituatur primus ejus valor $\frac{1}{2}$, habebitur valor totius Seriei summandæ: si pro z substituatur ejus valor secundus, proveniet Summa omnium Terminorum dempto primo; si pro z substituatur ejus valor tertius, proveniet Summa omnium exceptis primis duobus, & sic porro. Substituo igitur pro z valorem suum decimum quartum $13\frac{1}{2}$, ut z sit satis magna ad efficiendum Seriem celeriter convergere; & habeo $A = \frac{1}{27}$, $B = \frac{1}{29}$, $C = \frac{3}{31}$, $D = \frac{5}{33}$, $E = \frac{7}{35}$, $F = \frac{9}{37}$, &c. quo in casu Summa $A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{3}C + \frac{1}{4}D + \&c.$ æquabitur

$$\frac{1}{27 \cdot 28} + \frac{1}{29 \cdot 30} + \frac{1}{31 \cdot 32} + \&c. \text{ toti utique Seriei summandæ}$$

demptis primis tredecim Terminis. Horum igitur Summam quaero per additionem, invenioque fore .674285961. Dein ut obtineam Summam reliquorum, calculo eruo A, B, C, D, &c. ad tot decimalium loca quot est animus; eosque inventos divido respective per 1, 2, 3, 4, 5, &c. ut vides.

A = .018518519	.018518519
B = - 638570	319285
C = - - 61797	20599
D = - - - 9363	2341
E = - - - 1873	375
F = - - - 455	76
G = - - - 128	18
H = - - - 41	5
I = - - - 14	1

.018861219

Eoque

Eoque pacto obtineo .018861219 pro Summa Terminorum omnium post decimum tertium; hæc denique adjecta aggregato initialium prius invento, conficit .693147180 pro valore Seriei summandæ, id est, pro Logarithmo Hyperbolico binarii.

Quo plures Termini sub initio colliguntur, eo citius converget Series quæ dat Summam reliquorum, propter z tanto majorem. Atque hujus methodi præstantia in eo maxime enitet quod addendo Terminos aggregato initialium, z tot unitatibus augeatur, qua ratione Series transmutata ad libitum fere converget.

Quod autem in præxi impossibile sit assequi Summas harum Serierum per meram collectionem Terminorum, patebit ex computo sequente; ubi habetur Summa centum, mille, decies mille, & sic porro usque ad decies millies centena millia Terminorum:

Summa	{	100 - - - -	Terminorum	{	.690653446
		1000 - - - -			.692897242
		10000 - - -			.693122181
		100000 - - -			.693144680
		1000000 - -			.693146930
		10000000 - -			.693147155
		100000000 -			.693147178
		1000000000			.693147180

Ex hoc calculo constat centum Terminos dare Summam accuratam ad duas figuras; & gradatim decuplum Terminorum numerum colligendo, lucrari præterpropter unam tantummodo figuram: adeo ut si quis vellet eruere valorem hujus Seriei accuratum ad novem figurarum loca, nulla arte adhibita præter additionem, requirerentur circiter decies millies centena millia Terminorum. Et hæc Series convergit longe celerius quam aliæ quamplurimæ, quarum valores sunt Quantitates finitæ.

EXEMPLUM VI.

Summanda sit Series $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \dots$ ubi Denominatores sunt Quadrata numerorum 1, 2, 3, 4, &c. & Terminus in genere est $\frac{1}{zz}$: hic reductus in formam summabilem, evadit

$$\frac{1}{z.z+1} + \frac{1}{z.z+1.z+2} + \frac{1.2}{z.z+1.z+2.z+3} + \frac{1.2.3}{z.z+1.z+2.z+3.z+4} + \dots$$

Ergo Summa =

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{2z.z+1} + \frac{1.2}{3z.z+1.z+2} + \frac{1.2.3}{4z.z+1.z+2.z+3} + \dots$$

Qua

Summatio Serierum.

29

Quæ ponendo $A = \frac{1}{z}$, $B = \frac{A}{z+1}$, $C = \frac{2B}{z+2}$, $D = \frac{3C}{z+3}$,

$E = \frac{4D}{z+4}$, &c. evadit $A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{3}C + \frac{1}{4}D + \&c$. Jam si pro z substituaturs ejus valor decimus tertius 13, habebitur Summa omnium Terminorum in Serie summanda post decimum secundum; quo

in casu erit $A = \frac{1}{13}$, $B = \frac{1}{14}$, $C = \frac{2}{15}$, $D = \frac{3}{16}$, $E = \frac{4}{17}$, &c.

Et $A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{3}C + \frac{1}{4}D + \&c$. erit Summa Terminorum

$\frac{1}{169} + \frac{1}{196} + \frac{1}{225} + \frac{1}{256} + \&c$. Computus autem sic se habet

A = .076923077	.076923077
B = - 5494505	2747252
C = - - 732601	244200
D = - - - 137363	34341
E = - - - - 32321	6464
F = - - - - - 8978	1496
G = - - - - - 2835	405
H = - - - - - 992	124
I = - - - - - 378	42
K = - - - - - 155	16
L = - - - - - 67	6
M = - - - - - 31	3
N = - - - - - 15	1
	.079957427

Unde prodit .079957427 pro Summa Terminorum $\frac{1}{169} + \frac{1}{196} +$

$\frac{1}{225} + \&c$. quæ adjecta aggregato duodecim initialium, five 1.564976638,

conficit 1.644934065 pro valore totius Seriei $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \&c$

Convergit autem hæc Series minus celeriter ea *Brounkeri* in Exemplo priore.

I

PROPO

PROPOSITIO III.

Si Termini cujuscvis Seriei formentur scribendo numeros quoslibet unitate differentes pro z in Quantitate

$$x^{z+n} \text{ in } \frac{a}{z} + \frac{b}{z.z+1} + \frac{c}{z.z+1.z+2} + \frac{d}{z.z+1.z+2.z+3} + \&c.$$

erit Summa equalis x^{z+n} in

$$\frac{a}{1-x.z} + \frac{b-Ax}{1-x.z.z+1} + \frac{c-2Bx}{1-x.z.z+1.z+2} + \frac{d-3Cx}{1-x.z.z+1.z+2.z+3} + \&c.$$

Quantitates A, B, C, D, &c. designant Coefficientes Terminorum præcedentes eos in quibus reperiuntur; scilicet est $A = \frac{a}{1-x}$,

$B = \frac{b-Ax}{1-x}$, $C = \frac{c-2Bx}{1-x}$, &c. & sic porro. Excipio autem casum in quo est x æqualis unitati: ubi hoc accidit, Series summabitur per Propositionem superiorem. Hem vero demonstrationem. Finge Summam

$$S = x^{z+n} \text{ in } \frac{A}{z} + \frac{B}{z.z+1} + \frac{C}{z.z+1.z+2} + \frac{D}{z.z+1.z+2.z+3} + \&c.$$

deinde scribe valores variabilium succedentes $S-T$ & $z+1$ pro antecedentibus S & z respective, atque habebis

$$S-T = x^{z+n+1} \text{ in}$$

$$\frac{A}{z+1} + \frac{B}{z+1.z+2} + \frac{C}{z+1.z+2.z+3} + \frac{D}{z+1.z+2.z+3.z+4} + \&c.$$

$$\text{Hoc est, } S = x^{z+n} \text{ in}$$

$$\frac{Ax}{z+1} + \frac{Bx}{z+1.z+2} + \frac{Cx}{z+1.z+2.z+3} + \frac{Dx}{z+1.z+2.z+3.z+4} + \&c.$$

quæ reducta ad formam ipsius S , evadit

$$S-T = x^{z+n} \text{ in}$$

$$\frac{Ax}{z} + \frac{Bx-Ax}{z.z+1} + \frac{Cx-2Bx}{z.z+1.z+2} + \frac{Dx-3Cx}{z.z+1.z+2.z+3} + \&c.$$

Subdu-

Subducito nunc valorem ipsius $S - T$ a valore ipsius S , & relinquetur Terminus

$T = x^{z+n}$ in

$$\frac{A_1 - x}{z} + \frac{B_1 - x + Ax}{z.z + 1} + \frac{C_1 - x + 2Bx}{z.z + 1.z + 2} + \frac{D_1 - x + 3Cx}{z.z + 1.z + 2.z + 3} + \&c.$$

Hic denique valor ipsius T collatus cum illo in Propositione, dat $A_1 - x = a$, $B_1 - x + Ax = b$, $C_1 - x + 2Bx = c$, & ita porro. Quæ $\text{\AA}$ equationes exhibent valores Coefficientium ut supra. Quare valor Summæ recte assignatur. Q. E. D.

EXEMPLUM I.

Summanda fit Series $1 + \frac{1}{3}t + \frac{1}{5}t^2 + \frac{1}{7}t^3 + \frac{1}{9}t^4 + \&c.$ $\text{\AA}$ equatio ad eandem est $T = t^{z-\frac{1}{2}}$ in $\frac{1}{2}$, nam scribendo $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$, &c. successive pro z , provenient Termini Seriei. Comparando autem hunc Terminum cum illo in Theoremate; erit $x = t$, $n = -\frac{1}{2}$, $a = \frac{1}{2}$; at b , c , d , e , & Coefficientes reliquæ sunt nihil. Et hisce demum valoribus scriptis, oritur

$S = t^{z-\frac{1}{2}}$ in

$$\frac{1}{1-t.z} + \frac{At}{1-t.z.z+1} + \frac{2Bt}{1-t.z.z+1.z+2} + \frac{3Ct}{1-t.z.z+1.z+2.z+3} + \&c.$$

Ponamus Exempli gratia esse $t = -1$; & Series summanda erit $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \&c.$ atque evadet Summa

$$S = \pm 1 \text{ in } \frac{1}{4z} + \frac{A}{2z.z+1} + \frac{2B}{2z.z+1.z+2} + \frac{3C}{2z.z+1.z+2.z+3} + \&c.$$

$$\text{Vel } S = \pm 1 \text{ in } \frac{1}{4z} + \frac{A}{2z+2} + \frac{2B}{2z+4} + \frac{3C}{2z+6} + \frac{4D}{2z+8} + \&c.$$

Ubi A , B , C , D , &c. jam designant totos Terminos more *Newtoniano*, & non amplius Coefficientes. Et unitas cum signo ambiguo in quam tota Series multiplicatur, erit affirmativa ubi $z - \frac{1}{2}$ est numerus par, & negativa ubi est impar. Collige jam duodecem Terminos initiales, vel quod perinde est, sex in hac Serie $\frac{2}{1.3} + \frac{2}{5.7} + \frac{2}{9.11} + \&c.$ conjunctis

conjunctis binis quibusque in priore: eorumque Summam reperies .7646006915. Dein scribe pro z ejus valorem decimum tertium $12\frac{1}{2}$, & obtinebis

$$S = \frac{1}{50} + \frac{1}{27}A + \frac{2}{29}B + \frac{3}{31}C + \frac{4}{33}D + \frac{5}{35}E + \&c.$$

quæ est Series simplex & celeriter convergens: decem etenim Termini dant $S = .0207974719$ ut ex computo apposito liquet: & eâdem adjunctâ aggregato initialium, provenit .7853981634 pro valore Seriei summandæ: ad quem tamen nunquam pervenire liceret per additionem Terminorum. Atque colligendo plures initiales, valor ipsius S longe celerius approximabit. Hujus itaque Propositionis ope, Circumferentia circuli produci potest minimo labore ad figuras quamplurimas, per Seriem hancce utcumque lente convergentem; id quod olim multum desiderabat *Leibniti*us.

.0200000000

7407407

510856

49438

5992

856

139

25

5

1

 $S = .0207974719$

Periferia circuli obtinebitur quoque accuratissime

per Seriem *Newtoni* sequentem $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \&c.$ ubi Termini quique bini sunt alternatim negativi & affirmativi.

Idem etiam efficitur per hancce $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \&c.$ in qua Denominatores constituunt progressionem numerorum naturalium, dempto quoque tercio. Prior æquatur quartæ & posterior tertiæ totius circumferentiæ parti, ex suppositione quod horum Arcuum Chordæ sint unitates. Priusquam tamen tractentur per hanc Propositionem, dispertiendæ sunt utræque in duas; prior in hæc

$$1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{9} - \frac{1}{13} + \frac{1}{17} - \frac{1}{21} + \&c.$$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{7} + \frac{1}{11} - \frac{1}{15} + \frac{1}{19} - \frac{1}{23} + \&c.$$

Posterior in hæc $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \frac{1}{13} - \frac{1}{16} + \&c.$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{8} - \frac{1}{11} + \frac{1}{14} - \frac{1}{17} + \&c.$$

Dein

Dein harum quatuor unaquæque seorsim considerata est, & operatio instituenda ut in Exemplo superiore.

EXEMPLUM II.

Si Series sit $\frac{x}{1.2} + \frac{x^2}{3.4} + \frac{x^3}{5.6} + \frac{x^4}{7.8} + \frac{x^5}{9.10} + \&c.$ Æquatio erit

$T = x^z$ in $\frac{1}{4z.z-1}$, quæ resoluta in Seriem evadit

$T = x^z$ in

$$\frac{1}{4z.z+1} + \frac{3}{8z.z+1.z+2} + \frac{15}{16z.z+1.z+2.z+3} + \frac{105}{32z.z+1.z+2.z+3.z+4} + \&c.$$

Unde comparando membra, erit $n=0$, $a=\frac{1}{4}$, $b=\frac{3}{8}$, $c=\frac{15}{16}$,

$$d=\frac{105}{32}, e=\frac{945}{64}, \&c.$$

Adeoque $S = x^z$ in

$$\frac{1}{4.1-x.z} + \frac{3-8Ax}{8.1-x.z.z+1} + \frac{15-32Bx}{16.1-x.z.z+1.z+2} + \frac{105-96Cx}{32.1-x.z.z+1.z+2.z+3} + \&c.$$

Cujus Seriei progressio cuiusvis patet. Et ubi datur valor ipsius x in casu quovis particulari, dabitur Summa pro libitu accurata; primo scilicet addendo numerum sufficientem Terminorum initialium, eo fine ut z sit satis magna ad efficiendum valorem ipsius S celeriter convergere. Et hisce præmissis de Seriebus quarum Termini sunt assignabiles, pergendum est ad eas quæ determinantur per relationem Terminorum.

PROPOSITIO IV.

Data relatione inter Summas successivas, invenire eam quæ est inter Terminos.

In Æquatione definiente relationem inter Summas, substitue pro S' , S'' , S''' , &c. suos valores proprios $S-T$, $S-T-T'$, $S-T-T'-T''$, &c. & sic habebis Æquationem involventem Summam unicam S ; in qua scribe valores variabilium consequentes pro antecedentibus, & habebis Æquationem novam involventem Summam illam S : ope harum denique Æquationum eliminetur S , & ea quæ resultat monstrabit relationem Terminorum. Q. E. I.

K

EXEMPLUM

EXEMPLUM I.

Sit Æquatio ad Summas, $\overline{z-n} S = \overline{z-1} S'$; pro S' substatue suum valorem $S-T$, ac evadet Æquatio $\overline{n-1} S = \overline{z-1} T$; in qua scribe valores variabilium succedentes pro antecedentibus, id est, $S-T$ pro S , T' pro T , & $z+1$ pro z ; atque prodibit $\overline{n-1} S = \overline{n-1} T + z T'$; hanc de priore $\overline{n-1} S = \overline{z-1} T$ subducito, & manebit $\overline{z-n} T = z T'$; quæ est Æquatio ad Terminos Seriei.

EXEMPLUM II.

Proponatur Æquatio ad Summas $S \times \overline{8zz+20z+9} + 3 S' \times \overline{8zz+4z-3}$; substatue $S-T$ pro S' , ac invenies $S = \frac{3}{3^2} T \times \frac{8zz+4z-3}{zz+z}$; dein iuxta methodum differentialem scribe $S-T$ pro S , T' pro T , & $z+1$ pro z , ac proveniet $S-T = \frac{3}{3^2} T \times \frac{8zz+20z+9}{zz+3z+2}$; ope harum Æquationum extermina S , & habebitur $\overline{z+2} T + 3 T' z = 0$, quæ est Æquatio exhibens relationem Terminorum.

Atque eadem methodo exterminantur tres, pluresve Summæ successivæ.

PROPOSITIO V.

Invenire Series quotvis summabiles.

Æquatio ad Summas dabit Summam Terminorum, ea vero ad Terminos dabit Seriem; prior pro libitu assumitur, & ex ea deducitur posterior per Propositionem superiorem: habentur ergo Termini, eorumque Summa. Q. E. I.

EXEMPLUM I.

Sit Æquatio ad Summas $\overline{z-n} S = \overline{z-1} S'$, ut in Exemplo primo Propositionis præcedentis; invenies eam ad Terminos esse $\overline{z-n} T = z T'$. Æquatio autem ad Summas, substituendo $S-T$ pro S' , dabit Summam $S = \frac{z-1}{n-1} T$. Designent jam A, B, C, D , &c. Terminos hujus Seriei, & in Æquatione ad eosdem scribe, $m, m+1, m+2, m+3$, &c. successivæ.

ſucceſſive pro z , exiſtente m numero quocunque integro vel fracto, negativo vel affirmativo; atque prodibunt relationes Terminorum,

$$B = \frac{m-n}{m} A, C = \frac{m-n+1}{m+1} B, D = \frac{m-n+2}{m+2} C, E = \frac{m-n+3}{m+3} D,$$

&c. Tum in $\mathcal{A}$ equatione $S = \frac{z-1}{n-1} T$, ſcribe primum Terminum Seriei, id eſt, A pro T , & primum valorem ipſius z , id eſt, m pro z , atque invenies

$$S = \frac{m-1}{n-1} A = A + \frac{m-n}{m} A + \frac{m-n+1}{m+1} B + \frac{m-n+2}{m+2} C + \&c.$$

Ubi ſubſtituere licet quoviſ numeros pro m & n . Sit Exempli gratiâ $m=5$, $n=2$, $A = \frac{1}{12}$, & proveniet

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{12} + \frac{3}{5} A + \frac{4}{6} B + \frac{5}{7} C + \frac{6}{8} D + \&c.$$

$$\text{id eſt, } \frac{1}{3} = \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \frac{1}{7.8} + \&c.$$

Ubi patet Terminos eſſe assignabiles; id quod ſemper eveniet quando n eſt numerus integer: tot vero erunt factores in Denominatoribus, quot ſunt unitates in n . Sic in præſente Exemplo, eſt $n=2$, & propter id ſunt duo factores in Denominatoribus Terminorum.

Sit jam $m=2$, $n=\frac{3}{2}$, $A=1$, & prodibit

$$S=2=1 + \frac{1}{4} A + \frac{3}{6} B + \frac{5}{8} C + \frac{7}{10} D + \frac{9}{12} E + \&c.$$

$$\text{hoc eſt, } S=2=1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{5}{64} + \frac{7}{128} + \frac{21}{512} + \&c.$$

Nunc autem conſtat Terminos non eſſe assignabiles, quoniam n eſt numerus fractus. Notandum Seriem abrumpere & eſſe numero Terminorum finitam quotieſcunque eſt $m-n$ nihil vel integer & negativus. Atque ſi $n-1$ ſit nihil vel numerus negativus valor Seriei erit infinite

magnus: ut conſtat ex valore Summæ, nempe $\frac{m-1}{n-1} A$.

EXEMPLUM

EXEMPLUM II.

Sit Æquatio ad Summas $S \times \overline{8zz+20z+9} + 3 S' \times \overline{8zz+4z-3}$, ut in Exemplo novissimo Propositionis superioris, ubi inventa est

$$S = \frac{3}{32} T \times \frac{8zz+4z-3}{zz+z}, \text{ \& relatio Terminorum erat } \overline{z+2} T + 3zT' = 0.$$

Et si usurpetur unitas pro Termino primo, & primus valor ipsius z ponatur etiam unitas; obtinebitur

$$S = \frac{27}{64} = 1 - \frac{3}{8} + \frac{6}{64} - \frac{10}{27} + \frac{15}{81} - \frac{21}{243} + \&c.$$

Ubi Denominatores sunt dignitates ternarii, Numeratores vero numeri triangulares. In hisce Exemplis non expatiatus sum in deducendis Seriebus ex Æquationibus quæ definiunt relationes Terminorum, quoniam hoc ex Introductione hætenus notum suppono.

SCHOLION.

Summatio Serierum in Methodo differentiali, respondet Quadraturæ Curvarum in Methodo Fluxionum; & eapropter in utraque oriri solent difficultates consimiles, quæ hic sunt enodandæ. Diximus Series hinc inde continuari posse in infinitum: exempli gratia Series

$$1 + x + x^2 + x^3 + \&c. \text{ retrorsum continuata est } \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \&c.$$

Et hæ duæ simul junctæ constituunt unicam ex utraque parte excurrentem in infinitum, scilicet

$$\&c. + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \&c.$$

Nam hi Termini sunt in progressionem Geometricam continua, antecedentes ad consequentes ut unitas ad x . In Summatione hujus Seriei inveniemus

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \&c. \text{ quod quidem verum est ubi } x \text{ est minor unitate; attamen si sit major unitate, hæc Series erit infinite}$$

magna, atque Summa $\frac{1}{1-x}$, non amplius erit Summa horum Terminorum; sed mutato signo, æquabitur Seriei ad alteras partes excurrenti; hoc est, erit $\frac{-1}{1-x}$, vel $\frac{1}{x-1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \&c.$ Quod

fi

si x sit unitas, Summa erit $\frac{1}{1-1}$, & inde utraque pars Seriei erit infinite magna, utpote æqualis unitati infinities sumptæ.

Ad eundem modum si Æquatio ad Seriem sit $\frac{z}{z-n} T = z T'$, & Series continuetur ex utraque parte in infinitum; una pars converget & altera diverget præterquam ubi est $n = 1$; & Summa $\frac{z-1}{n-1} T$ semper æquabitur parti Seriei convergenti.

Haud secus in Quadraturis, si z^{-n} sit Ordinata Curvæ Hyperbolicæ, fluens $\frac{1}{1-n} z^{1-n}$ exprimet partem Areæ ad has aut illas Ordinatæ partes jacentem prout n est minor aut major unitate: ubi tamen n est unitas, Area ex utraque parte Ordinatæ erit infinite magna, ut in Hyperbola Apollonii.

Series quidem, etiam si quantitates quæ per eas quærentur sint finitæ magnitudinis, sæpissime solent divergendo evadere infinite magnæ, in illis autem casibus continuatæ in alteras partes nonnunquam convergunt & æquantur Radicibus quæsitis, vel ab iisdem differunt quantitate determinata. Nonnunquam etiam utrinque continuatæ divergunt: sæpius etiam ad utrasque partes nequeunt excurrere in infinitum propter Terminos impossibiles vel infinite parvos.

Insuper sicut Areæ Curvarum nunc augendæ nunc minuendæ sunt datis quantitibus, ut evadant veræ; ita etiam Summæ per hanc Propositionem inventæ nonnunquam differunt a veris, quo in casu corrigendæ sunt additione vel ablatione quantitatis datæ. Scilicet ubi Æquatio ad Summas talis est qualis efficit earum ultimam esse quantitatem magnitudinis finitæ vel infinite magnæ, semper opus est correctione: monstrabo igitur in sequente Propositione, qua ratione assumenda sit Æquatio quæ semper efficiet ultimam esse nihil; eoque pacto summa inventa erit vera, nec augenda neque minuenda, ut hætenus monstratum est.

PROPOSITIO VI.

Si Æquatio ad Summas sit $S \times z^0 + a z^{1-1} + b z^{2-2} + \&c.$
 $= m S' \times z^1 + c z^{1-1} + d z^{2-2} + \&c.$ ultima Summarum erit finitæ magnitudinis in eo casu solo, ubi est $m = 1$, & simul $a = c$.

Ad hanc Propositionem demonstrandam, sciendum est Summam S investigari posse ex Æquatione definiente relationem inter eam ejusque
 L valorem

valorem successivum S' , eodem fere modo ac quantitas Fluxionalis ex sua Æquatione. Illum in finem assumenda est pro S Series hujus formæ,

$$\frac{z^n}{p^z} \text{ in } A + \frac{B}{z} + \frac{C}{z^2} + \frac{D}{z^3} + \&c.$$

ubi $n, p, A, B, C, D, \&c.$ sunt quantitates invariabiles. In casu autem præsentē ubi Summa quæsitā est omnium ultima, adeoque ad distantiam infinitam remota; erit z etiam infinite magna, utpote quæ vel æqualis est illi distantiae vel ab eadem differt quantitate finitā: hac de causa Termini Seriei posteriores sunt infinite minores prioribus. Igitur ad abbreviandum computum, rejicio omnes post primum, utpote quæ in hac demonstratione sunt inutiles: sic habeo $S = \frac{Az^n}{p^z}$; in qua scriben-

do S' pro S , & $\overline{z+1}$ pro z ; obtineo $S' = \frac{A\overline{z+1}^n}{p^{\overline{z+1}}}$. Hosce valores

substituē pro S & S' in Æquatione ad Summas, vel quod eodem redit, in hac $S \times \overline{z+a} = mS' \times \overline{z+c}$, membris reliquis ob rationes supra expo-

fitas neglectis; & resultabit $\frac{Az^n}{p^z} \times \overline{z+a} = \frac{mA\overline{z+1}^n}{p^{\overline{z+1}}} \times \overline{z+c}$. Vel ducen-

do in $p^{\overline{z+1}}$, & dividendo per A , $pz^n \times \overline{z+a} = m \times \overline{z+1}^n \times \overline{z+c}$. Cæterum per Theorema *Newtoni* pro evolvendo Binomio, est $\overline{z+1}^n = z^n + nz^{n-1}$, idque accurate propter z infinite magnam. Hunc valorem substituē, & evadet Æquatio $pz^n \times \overline{z+a} = m \times \overline{z^n + nz^{n-1}} \times \overline{z+c}$, quæ divisa per z^{n-1} , fit $pz \times \overline{z+a} = m \times \overline{z+n} \times \overline{z+c}$, vel $pzz + paz = mzz + \overline{n+c} \times m \times \overline{z+c}$; in qua conferendo membra homologa, erit $p = m$ & $pa = \overline{n+c} \times m$, unde $n = a - c$: & proinde ultima Summa

S , quæ antea erat $\frac{Az^n}{p^z}$, jam evadit $\frac{Az^{a-c}}{m^z}$, ubi notandum est Coefficientem A non determinari. Fingatur nunc $m = 1$, & simul $a = c$;

& Summa fiet $\frac{Az^0}{1^z}$: est vero $z^0 = 1$, & $1^z = 1$, etiamsi z sit infinite magna; atque adeo ultima Summarum est finita, quippe æqualis quantitati A ubi est $m = 1$, & simul $a = c$: alius autem non datur casus in quo $\frac{Az^{a-c}}{m^z}$ est quantitas finita ubi z est infinite magna. Constat igitur Propositio.

COROL-

COROLLARIUM.

Si m sit minor unitate, ultima Summa erit infinite magna; & infinite parva ubi m est major unitate. Et si m sit unitas, Summa illa erit infinite magna vel parva prout a est major aut minor c . Igitur in $\mathcal{A}$ equatione ad Summas si m sit major unitate, vel unitati æqualis & simul a minor c ; ultima Summa semper erit nihil & nulla Correctione opus erit.

EXEMPLUM.

Sit Summa prima $A=1$, secunda $B=\frac{9}{8}A$, tertia $C=\frac{25}{24}B$, quarta $D=\frac{49}{48}C$, quinta $E=\frac{81}{80}D$, &c. Atque $\mathcal{A}$ equatio ad easdem erit $S \times \overline{zz+z+1\frac{1}{4}} = S' \times \overline{zz+z}$; quæ collata cum $\mathcal{A}$ equatione generali, dat $m=1$, $a=1$, $c=1$; & inde $a-c=0$; unde per hanc Propositionem ultima Summarum, id est factum sub omnibus numeris

$1 \times \frac{9}{8} \times \frac{25}{24} \times \frac{49}{48} \times \frac{81}{80} \times \frac{121}{210} \times \&c.$ in infinitum, est quantitas finita.

In $\mathcal{A}$ equatione ad Summas substitue $S-T$ pro S , & invenies $S = -4T \times \overline{zz+z}$, quæ quoniam prodit negativa respectu ipsius T , exhibet Summam Terminorum non a dato Terminò usque in infinitum, sed a dato Terminò usque ad principium Seriei.

Quod ut clarius pateat, proponantur duæ $\mathcal{A}$ equationes $Szz = S' \times \overline{zz-1}$, & $Sz = S' \times \overline{z+1}$: utraque harum dabit eandem $\mathcal{A}$ equationem ad Terminos, scilicet $Tz = T' \times \overline{z+1}$. Ex priore tamen deducitur $S = -T \times \overline{zz+1}$, & ex posteriore $S = T \times \overline{z+1}$. In primo casu S est Summa Terminorum ab initio usque ad T ; & in secundo S est Summa ipsius T & omnium sequentium in infinitum. In $\mathcal{A}$ equatione ad Terminos scribantur numeri 1, 2, 3, 4, &c. successive pro z , & usurpetur $\frac{1}{2}$ pro primo Terminò; atque prodibit Series

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \frac{1}{7.8} + \&c.$$

Ubi si quæretur aggregatum primorum quatuor Terminorum, scribe 5 pro z in $T \times \overline{zz-1}$ valore Summæ S priore, & Terminum quintum $\frac{1}{5.6}$ pro T , atque obtinebis $\frac{25-1}{5.6} = \frac{4}{5} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5}$,
quatuor

Quatuor utique Terminis initialibus. At si vis Summam omnium omnino Terminorum, præter illos quatuor, scribe $\frac{1}{5.6}$ pro $\frac{1}{z}$, & $\frac{1}{5.6}$ pro $\frac{1}{T}$, in $\frac{1}{z+1}$ valore ipsius S posteriore; ac habebis $\frac{6}{5.6} = \frac{1}{5} = \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \frac{1}{7.8} + \frac{1}{8.9} + \&c.$ Et hi duo valores ipsius S simul additi, hoc est, Summa numerorum $\frac{4}{5}$ & $\frac{1}{5}$ conficit $\frac{4+1}{5} = 1$ pro valore omnium omnino Terminorum ab initio usque ad infinitum.

PROPOSITIO VII.

Si Aequatio ad Seriem sit $\frac{z-n}{z}T + \frac{m-1}{m}zT'$, erit

$$S = \frac{m-1}{m}T + \frac{n}{z} \times \frac{A}{m} + \frac{n+1}{z+1} \times \frac{B}{m} + \frac{n+2}{z+2} \times \frac{C}{m} + \frac{n+3}{z+3} \times \frac{D}{m} + \frac{n+4}{z+4} \times \frac{E}{m} + \&c.$$

Finge Summam S æqualem esse Termino T ducto in quantitatem y , hoc est $S = Ty$; dein scribe valores indeterminatarum posteriores $S = T$, T' , y' pro prioribus S , T , & y respective, atque habebitur $S = T = T'y'$; quæ ablata de priore $S = Ty$, relinquit $T = Ty - T'y'$, unde est $T' = T \times \frac{y-1}{y'}$. Sed per Aequationem ad Seriem sci-

licet $\frac{z-n}{z}T + \frac{m-1}{m}zT'$, est $T' = -\frac{\frac{z-n}{z}T}{\frac{z}{m}-1}$. Adeoque æquando sibi

invicem duos ipsius T' valores, erit $T \times \frac{y-1}{y'} = -\frac{\frac{z-n}{z}T}{\frac{z}{m}-1}$: quæ divisa per T , & ducta in $\frac{m-1}{m}y'$, evadit $\frac{m-1}{m}y - m + 1 = -y' + \frac{n}{z}y'$, vel $\frac{m-1}{m}y + y' - \frac{n}{z}y' - m + 1 = 0$: quæ est Aequatio Differentialis ex cujus resolutione dabitur Radix y . Illum in finem assume

$y = a + \frac{b}{z} + \frac{c}{z.z+1} + \frac{d}{z.z+1.z+2} + \frac{e}{z.z+1.z+2.z+3} + \&c.$
tum scribe pro y & z , valores earum succedaneos y' & $z+1$ respective, atque habebis

$$y' = a$$

$$y' = a +$$

$$\frac{b}{z+1} + \frac{c}{z+1.z+2} + \frac{d}{z+1.z+2.z+3} + \frac{e}{z+1.z+2.z+3.z+4} + \&c.$$

$$\text{hoc est, } y' = a + \frac{b}{z} + \frac{c-b}{z.z+1} + \frac{d-2c}{z.z+1.z+2} + \frac{e-3d}{z.z+1.z+2.z+3} + \&c.$$

Atque prior valor ipsius y' multiplicatus per $\frac{n}{z}$, evadit

$$\frac{n}{z} y' = \frac{na}{z} + \frac{nb}{z.z+1} + \frac{nc}{z.z+1.z+2} + \frac{nd}{z.z+1.z+2.z+3} + \&c.$$

Hosce valores ad eandem formam jam reductos substitue in Æquatione, & resultabit

$$ma - m + 1 + \frac{mb - na}{z} + \frac{mc - \overline{n+1}.b}{z.z+1} + \frac{md - \overline{n+2}.c}{z.z+1.z+2} + \&c. = 0.$$

Ubi ponendo membra homologa æqualia nihilo, habebitur $a = \frac{m-1}{m}$,

$$b = \frac{n}{m} a, c = \frac{n+1}{m} b, d = \frac{n+2}{m} c, e = \frac{n+3}{m} d, \&c. \text{ Et hisce datis,}$$

dabitur valor Radicis y , quæ denique ducta in T exhibebit pro S , Seriem in Propositione exhibitam. Q. E. D.

Corollarium. Si n sit numerus integer & negativus, vel nihil; valor ipsius S abruptet, existente Serie summabili. Et ubi m est negativus, Series erit infinite magna. Hic autem excipio casum in quo est $m=0$; tum enim Series summabitur per Exemplum primum Propositionis quintæ.

EXEMPLUM I.

Proponatur Series summanda $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} A + \frac{2}{5} B + \frac{3}{7} C + \frac{4}{9} D +$

$\frac{5}{11} E + \&c.$ Æquatio eam definiens est $z - \frac{1}{2} T - 2z T' = 0$, ubi valores

successivi ipsius z sunt $1 \frac{1}{2}, 2 \frac{1}{2}, 3 \frac{1}{2}, 4 \frac{1}{2}, \&c.$ & illa collata cum

Æquatione generali dat $n = \frac{1}{2}$, $m-1 = -2$, sive $m = -1$; quibus substitutis, oritur

M

S=

$$S = 2T - \frac{A}{2z} - \frac{3B}{2z+2} - \frac{5C}{2z+4} - \frac{7D}{2z+6} - \frac{9E}{2z+8} - \&c.$$

In qua si substituatur quilibet Terminus pro T, & pro z valor suus correspondens, erit S Summa ipsius T & Terminorum omnium sequentium usque in infinitum. Colligo itaque duodecem Terminos initiales; eorumque aggregatum emergit .78533961813. Dein ut obtineam Summam reliquorum, scribo Terminum decimum tertium, id est,

.00003029411 pro T, & pro z valorem suum debitum $13\frac{1}{2}$; atque habeo

$$S = .00006058822 - \frac{1}{27}A - \frac{3}{29}B - \frac{5}{31}C - \frac{7}{33}D - \frac{9}{35}E - \&c.$$

Ubi Termini prodeunt alternatim negativi & affirmativi, hosce dispono in una columna & illos in altera ut vides

.00006058822	.00000224401
23214	3744
794	204
61	20
7	3
1	1
+ .00006082899	- .00000228373

Tum Summam negativorum .00000228373 auferens ab ea affirmativorum .00006082899, habeo $S = .00005854526$, quæ adjecta Summæ initialium exhibet .785339816339 pro valore Seriei propositæ, id est, pro Area Circuli cujus Diamiter est unitas.

EXEMPLUM II.

$$\text{Quærat} \text{ur valor Seriei } 1 - \frac{1}{2}A - \frac{3}{4}B - \frac{5}{6}C - \frac{7}{8}D - \frac{9}{10}E - \&c.$$

Æquatio definiens relationem Terminorum est $z - \frac{1}{2}T + zT' = 0$,

in qua valores Abscissæ z sunt 1, 2, 3, 4, &c. comparando autem hanc Æquationem cum illa in Theoremate, erit $n = \frac{1}{2}$, $m - 1 = 1$, & $m = 2$: atque exinde

$$S = \frac{1}{2}T + \frac{A}{4z} + \frac{3B}{4z+4} + \frac{5C}{4z+8} + \frac{7D}{4z+12} + \frac{9E}{4z+16} + \&c.$$

Collige

Collige nunc decem Terminos initiales Seriei transmutandæ, eorumque Summam reperies fore .6168670654. Deinde ut habeatur Summa reliquorum; in valore ipsius S scribe Terminum decimum primum, id est, .1761970520 pro T & 11 pro z; atque prodibit

$$S = .0880985260 + \frac{1}{44} A + \frac{3}{48} B + \frac{5}{52} C + \frac{7}{56} D + \frac{9}{60} E + \&c.$$

Et ineundo computum ut in margine, invenietur $S = .0902397156$, quæ addita aggregato initialium prius invento efficit .7071067810 pro valore Seriei, id est pro $\sqrt{\frac{1}{2}}$. Etenim $\sqrt{\frac{1}{2}}$ sic scripta $1 + 1^{-\frac{1}{2}}$, & evoluta per Theorema Newtoni, evadit Series de qua nunc egimus.

.0880985260
20022392
1251400
120327
15041
2256
388
74
15
3

SCHOLION.

Omnis Series cujus Termini sunt per vices negativi & affirmativi, si transmutetur per hanc Propositionem, migrabit in aliam celerius convergentem cujus Termini sunt ejusdem signi. Et è contra omnis Series cujus Termini sunt ejusdem signi, abibit in aliam cujus Termini sunt alternatim negativi & affirmativi, quæ tamen non converget celerius priore præterquam ubi Transmutatio inchoatur a Terminis ab initio satis remotis. Et si Series transmutetur, & rursus transmutetur ea quæ ex prima Transmutatione prodiit, emerget ea prius proposita. Exempli gratia si Series

$$S = .0902397156$$

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \&c. \text{ transmutetur, prodibit } \frac{1}{2} + \frac{1}{3} A +$$

$$\frac{2}{5} B + \frac{3}{7} C + \frac{4}{9} D + \&c. \text{ dein si novissima transmutetur emerget pri-$$

$$\text{ma } 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \&c. \text{ hoc est, transfert Seriem de Tangente ad}$$

Sinum, vel de Sinu ad Tangentem. Sed in hisce casibus debet operatio ordiri ad primum Terminum Seriei, nempe ubi agitur de Transmutatione totius.

PROPOSITIO VIII.

Si Æquatio ad Seriem sit $T' = \frac{z-m}{z} \times \frac{z-n}{z-n+1} T$, &

ponatur $A = \frac{n}{z-n} T$, $B = \frac{n}{z} A$, $C = \frac{n+1}{z+1} B$, $D = \frac{n+2}{z+2} C$,

$E = \frac{n+3}{z+3} D$, &c. Erit $S = \frac{A}{m} + \frac{B}{m+1} + \frac{C}{m+2} + \frac{D}{m+3}$ &c.

Etenim suppone $S = T \times \frac{z-n}{z} \times y$, & per methodum Differentialem erit $S - T = T' \times \frac{z-n+1}{z-n} \times y'$, harum Æquationum Differentia dabit $T = T' \times \frac{z-n}{z-n+1} \times y - T' \times \frac{z-n+1}{z-n} \times y'$. Pro T' scribe suum valorem $\frac{z-m}{z} \times \frac{z-n}{z-n+1} T$, atque habebitur $T = T \times \frac{z-n}{z-n+1} \times y - T \times \frac{z-m}{z} \times$

$\frac{z-n}{z-n+1} \times y'$ quæ divisa per $T \times \frac{z-n}{z-n+1}$, evadit $\frac{1}{z-n} = y - \frac{z-m}{z} y'$, vel

$y - y' + \frac{m}{z} y' - \frac{1}{z-n} = 0$. Ex hac vero Æquatione eruetur Radix y

ad modum sequentem. Finge

$$y = \frac{a}{m} + \frac{b}{m+1.z} + \frac{c}{m+2.z.z+1} + \frac{d}{m+3.z.z+1.z+2} + \&c.$$

Erit $y' =$

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{m+1.z+1} + \frac{c}{m+2.z+1.z+2} + \frac{d}{m+3.z+1.z+2.z+3} + \&c.$$

Et $y - y' =$

$$\frac{b}{m+1.z.z+1} + \frac{2c}{m+2.z.z+1.z+2} + \frac{3d}{m+3.z.z+1.z+2.z+3} + \&c.$$

Atque $\frac{m}{z} y' =$

$$\frac{am}{mz} + \frac{bm}{m+1.z.z+1} + \frac{cm}{m+2.z.z+1.z+2} + \frac{dm}{m+3.z.z+1.z+2.z+3} + \&c.$$

Adeoque

Adeoque $y - y' + \frac{m}{z} y' =$

$$\frac{a}{z} + \frac{c}{z \cdot z + 1} + \frac{b}{z \cdot z + 1 \cdot z + 2} + \frac{d}{z \cdot z + 1 \cdot z + 2 \cdot z + 3} + \&c.$$

Eft vero $\frac{1}{z-n} =$

$$\frac{1}{z} + \frac{n}{z \cdot z + 1} + \frac{n \cdot n + 1}{z \cdot z + 1 \cdot z + 2} + \frac{n \cdot n + 1 \cdot n + 2}{z \cdot z + 1 \cdot z + 2 \cdot z + 3} + \&c.$$

Igitur $y - y' + \frac{m}{z} y - \frac{1}{z-n} =$

$$\frac{a-1}{z} + \frac{b-n}{z \cdot z + 1} + \frac{c-n \cdot n + 1}{z \cdot z + 1 \cdot z + 2} + \frac{d-n \cdot n + 1 \cdot n + 2}{z \cdot z + 1 \cdot z + 2 \cdot z + 3} + \&c. = 0.$$

Pone jam Numeratores nihil, ut evanescant Termini; & pro determinatione Coefficientium habebis Æquationes fequentes $a=1$, $b=n$, $c=n \cdot n + 1$, $d=n \cdot n + 1 \cdot n + 2$, &c. substitue hosce valores in Serie assumpta pro y , vice ipsarum a, b, c, d , &c. & valor ipsius y , exinde ortus ductus in $\frac{1}{z-n} T$, exhibebit pro S , Seriem in Theoremate positam. Q. E. D.

Corollarium. Si n fit integer & negativus, vel nihil; Series summabitur accurate per hoc Theorema. Et si m fit nihil vel negativus, Series erit infinite magna. Inservit autem hæc Propositio & superior Quadraturæ Curvarum binomialium. Hæc usui venit ubi in Ordinata $x^e \times e + f x^q$, est $e + f x^q = 0$; superior vero adhibenda est ubi contrarium accidit.

EXEMPLUM I.

Quærat^r valor Seriei $1 + \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 3} A + \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 5} B + \frac{5 \cdot 5}{6 \cdot 7} C + \frac{7 \cdot 7}{8 \cdot 9} D + \frac{9 \cdot 9}{10 \cdot 11} E + \&c.$

Æquatio eam definiens est $T' = \frac{z - \frac{1}{2}}{z} \times \frac{z - \frac{1}{2}}{z + \frac{1}{2}} T$, uti patebit scribendo valores 1, 2, 3, 4, &c. successive pro z . Æquatio autem in Theoremate comparata cum hac, dat $m = \frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{2}$; unde $A = \frac{1}{z - \frac{1}{2}} T$, $B =$

N

$\frac{A}{2z}$

$\frac{A}{2z}, C = \frac{3B}{2z+2}, D = \frac{5C}{2z+4}, E = \frac{7D}{2z+6}, \&c.$ atque $S = \frac{2}{1} A + \frac{2}{3} B + \frac{2}{5} C + \frac{2}{7} D + \frac{2}{9} E + \&c.$ Ineundo computum reperiō aggregatum duodecem Terminorum esse 1.407397508. Dein substituo Terminum decimum tertium, id est, $\frac{1}{25} \times .161180258$ pro T, & pro z valorem suum correspondentem 13, sic prodit

$A = \frac{1}{2} \times .161180258,$	.166180258
$B = \frac{1}{2} \times - 6199241,$	2066414
$C = \frac{1}{2} \times - - 664204,$	132841
$D = \frac{1}{2} \times - - - 110701,$	15814
$E = \frac{1}{2} \times - - - 24261,$	2691
$F = \frac{1}{2} \times - - - 6410,$	583
$G = \frac{1}{2} \times - - - 1959,$	151
$H = \frac{1}{2} \times - - - 670,$	45
$I = \frac{1}{2} \times - - - 250,$	15
$K = \frac{1}{2} \times - - - 102,$	5
$L = \frac{1}{2} \times - - - 44,$	2
$M = \frac{1}{2} \times - - - 20,$	1
	$S = .163398820$

Ex hoc computo habeo $S = .163398820$, valorem utique Terminorum omnium post decimum secundum; quem itaque adjiciens Summæ initialium, 1.407397508, habeo 1.570796328 pro valore Seriei summandæ, id est, pro longitudine Arcus semicircularis cujus Diameter est unitas.

Termini initiales, quando eorum Summa eruitur, facillime reducuntur in fractiones decimales per regulam sequentem, pone $a = 1, b =$

$a - \frac{1}{2} a, c = b - \frac{1}{4} b, d = c - \frac{1}{6} c, e = d - \frac{1}{8} d, \&c.$ eruntque Termini $a, \frac{1}{3} b, \frac{1}{5} c, \frac{1}{7} d, \frac{1}{9} e, \&c.$

EXEMPLUM II.

Proponatur Series *Brounkeri* $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{7.8} + \&c.$ Aequatio

quatio ad eandem est $T' = \frac{z-1}{z} \times \frac{z-\frac{1}{2}}{z+\frac{1}{2}} T$, vel etiam $T' = \frac{z-1}{z} \times \frac{z-\frac{3}{2}}{z-\frac{1}{2}} T$, scilicet sumendo initium Abscissæ z a diversis punctis. In priore valores ipsius z sunt $\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}, \&c.$ $m=1, n=\frac{1}{2}, A=z-\frac{1}{2}T, B=\frac{A}{2z}, C=\frac{3B}{2z+2}, D=\frac{5C}{2z+4}, \&c.$ In posteriore valores ipsius z sunt $2, 3, 4, 5, \&c.$ $m=1, n=\frac{3}{2}, A=z-\frac{3}{2}T, B=\frac{3A}{2z}, C=\frac{5B}{2z+2}, D=\frac{7C}{2z+4}, \&c.$ & in utroque erit $S=A+\frac{1}{2}B+\frac{1}{3}C+\frac{1}{4}D+\&c.$ Dabitur ergo S ad plures figuras sumendo pro T quemvis ϵ Terminis sat longe distantibus a principio. Et similiter in aliis casibus instituere licet computum, idque duobus modis diversis ubi Termini sunt assignabiles. Hæc autem Series hunc in modum scripta $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\&c.$ facilius tractabitur per Propositionem tertiam aut septimam.

SCHOLIUM.

Hactenus egimus de Summatione Serierum quæ prodeunt in Quadratura Curvarum binomialium, & similibus. Cæterum procedere licet eodem modo in casibus difficilioribus: nam Summa Seriei determinatur & erui potest ex data relatione Terminorum; idque resolvendo Æquationem Differentialem ut in novissimis duabus Propositionibus. Problema autem esset laboriosum quærere Summas independentes a Terminis, quando Termini non sunt assignabiles; ideoque quæsi quantitatem quæ ducta in Terminum T exhibet Summam S . Sic etiam Areæ Curvarum facilius eruuntur mediantibus Ordinatis, nam Series hac ratione prodeunt sunt simplicissimæ. Et hisce præmissis pergo ad methodum resolvendi Radices Æquationum Differentialium in Series magis quidem compositas, at simul longe magis convergentes quam superiores; quas ea tantum de causa exhibui, quod essent simplices & usibus vulgaribus sufficientes.

Hucusque Summam quamlibet designavimus per S , ejusque Terminos per $T, T', T'', \&c.$ At in sequentibus etiam designabimus Series vel Summas, per $S_2, S_3, S_4, \&c.$ earumque Terminos per $T_2, T'_2, T''_2,$

T''_2 , &c. T_3 , T'_3 , T''_3 , &c. & sic porro: adeo ut fit

$$S_2 = T_2 + T'_2 + T''_2 + \&c.$$

$$S_3 = T_3 + T'_3 + T''_3 + \&c.$$

$$S_4 = T_4 + T'_4 + T''_4 + \&c.$$

&c.

Et sicut in Serie S, Summæ successivæ designantur per S', S'', &c. ita in Serie S₂, denotabuntur per S'₂, S''₂, &c. atque in Serie S₃ per S'₃, S''₃, &c. Et sic in cæteris. Hanc autem notationem introducere coactus sum, propterea quod Summæ & Termini diversarum Serierum simul considerandæ veniunt in eadem Æquatione.

PROPOSITIO IX.

Data relatione inter duas Summas in diversis Seriebus, & Æquatione ad Terminos in alterutra; invenire Æquationem ad Terminos in altera.

Problema solvitur progrediendo ex relatione variabilium præsentē ad succedentem, ut exinde eliminentur Summæ; id quod Exemplis patebit.

EXEMPLUM I.

Sint S & S₂ duæ Summæ in diversis Seriebus, earumque relatio $S = \frac{m+1 \cdot z - n}{m \cdot m + 1} T + S_2$; fit vero $T' = \frac{z - m}{z} \times \frac{z - n}{z - n + 1} T$, relatio Terminorum Seriei S: atque ex hisce datis oporteat eruere Æquationem ad Terminos Seriei S₂. In Æquatione $S = \frac{m+1 \cdot z - n}{m \cdot m + 1} T + S_2$, exhibente relationem Summarum, substitue valores variabilium consequentes pro antecedentibus, hoc est, S' five S - T pro S; S'₂, five S₂ - T₂ pro S₂; T' pro T, & z + 1 pro z; atque habebis S - T = $\frac{m+1 \cdot z + 1 - n}{m \cdot m + 1} T' + S_2 - T_2$, quæ ablata de priore relinquit Æquationem liberatam a Summis, scilicet $T = \frac{m+1 \cdot z - n}{m \cdot m + 1} T - \frac{m+1 \cdot z + 1 - n}{m \cdot m + 1} T' + T_2$; unde est $T_2 = \frac{m+1 \cdot z + 1 - n}{m \cdot m + 1} T' - \frac{m+1 \cdot z - m - n}{m \cdot m + 1} T$: in qua substi-

substitue pro T' valorem proprium $\frac{z-m}{z} \times \frac{z-n}{z-n+1} T$, atque obtinebis $T_2 = \frac{n \cdot m - n + 1}{m+1 \cdot z \cdot z - n + 1} T$. In hoc insuper valore scribe valores indeterminatarum succedentes T'_2 , T' , & $z+1$ pro præsentibus T_2 , T , & z , & orietur $T'_2 = \frac{n \cdot m - n + 1}{m+1 \cdot z+1 \cdot z - n + 2} T'$; ubi pro T' rursus substituendo suum valorem, emergit $T'_2 = \frac{n \cdot m - n + 1}{m+1 \cdot z+1 \cdot z+1 \cdot z - n + 2} T \times \frac{z-m}{z} \times \frac{z-n}{z-n+1}$, ex qua prodit $T = \frac{m+1 \cdot z \cdot z+1 \cdot z - n + 1 \cdot z - n + 2}{n \cdot m - n + 1 \cdot z - m \cdot z - n} T'_2$. Æquatio autem prius inventa $T_2 = \frac{n \cdot m - n + 1}{m+1 \cdot z \cdot z - n + 1} T$ dat $T = \frac{m+1 \cdot z \cdot z - n + 1}{n \cdot m - n + 1} T_2$. Æquentur jam sibi invicem duo valores Termini T , & incidet in Æquationem $T'_2 = \frac{z-m}{z+1} \times \frac{z-n}{z-n+2} T_2$, quæ exprimit relationem Terminorum Seriei S_2 . Q. E. I.

EXEMPLUM II.

Sit jam relatio inter Summas $S = \frac{3}{4} \times \frac{4z+3}{4z+2} T + S_2$, & $zT + 3T' \times \frac{z}{z+1}$ Æquatio ad Seriem S . In Æquatione ad Summas scribe valores variabilium successivos, & habebitur $S - T = \frac{3}{4} \times \frac{4z+7}{4z+6} T' + S_2 - T_2$: quam de priore auferens habebis $T = \frac{3}{4} \times \frac{4z+3}{4z+2} T - \frac{3}{4} \times \frac{4z+7}{4z+6} T' + T_2$; ex qua comperies $T_2 = \frac{1}{4} \times \frac{4z-1}{4z+2} T + \frac{3}{4} \times \frac{4z+7}{4z+6} T'$. Cæterum per Æquationem ad Seriem S , est $3T' = -\frac{z}{z+1} T$, quo scripto, prodit $T_2 = +\frac{1}{4} \times \frac{4z-1}{4z+2} T + \frac{1}{4} \times \frac{4z+7}{4z+6} \times \frac{-z}{z+1} T$, vel $T_2 = -\frac{3}{4} T \times \frac{1}{2z+1} \times \frac{1}{2z+2} \times \frac{1}{2z+3}$. Atque rursus

fus progrediendo ad valores indeterminatarum succedentes, habebitur

$$T'_2 = -\frac{3}{4} T' \times \frac{1}{2z+3} \times \frac{1}{2z+4} \times \frac{1}{2z+5}, \text{ vel substituendo } -\frac{z}{z+1} T$$

pro $3T'$, $T'_2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2z+2} \times \frac{1}{2z+3} \times \frac{1}{2z+4} \times \frac{1}{2z+5} T$: unde $T = \frac{2 \cdot 2z+2 \cdot 2z+3 \cdot 2z+4 \cdot 2z+5}{T'_2}$; atque per valorem ipsius T_2 est idem

$$T = -\frac{4}{3} \times \frac{1}{2z+1} \times \frac{1}{2z+2} \times \frac{1}{2z+3} T_2; \text{ quibus duobus valoribus inter se}$$

æquatis, obtinebitur $zz + \frac{1}{2}z \times T_2 + zz + \frac{9}{2}z + 5 \times 3 T'_2 = 0$. Æquatio utique ad Terminos Seriei S. Et in aliis casibus similiter procedendum est.

SCHOLION.

Per hanc Propositionem Series infinitæ inter se comparari possunt. Nam Æquatio exhibens relationem inter Summas S & S₂, dabit unam ex data altera: & Termini ipsarum S & S₂, dabuntur ex suis Æquationibus, quarum una assumitur, altera vero ex ea assumpta eruitur: ut in Exemplis hujus Propositionis. Ut si relatio Summarum sit $S =$

$$\frac{2z-1}{2} T + S_2, \text{ \& \text{Æquatio ad Seriem S, } T' = \frac{2z-2z+1}{2z} T; \text{ inve-}$$

$$\text{nies } T_2 = \frac{T}{2zz}, \text{ \& } T'_2 = \frac{2z-2z+1}{2z+2z+1} T_2 \text{ Æquationem ad Seriem S}_2.$$

Sint jam 2, 3, 4, 5, &c. valores succedentes indeterminatæ z; & usurpando unitatem pro T invenies

$$S = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \&c.$$

$$S_2 = \frac{1}{8} \text{ in } 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{36} + \frac{1}{100} + \frac{1}{225} + \&c.$$

In priore Denominatores sunt quadrata numerorum naturalium, & in posteriore quadrata numerorum Triangularium. Relatio autem inter

Series $S = \frac{2z-1}{2} T + S_2$, scribendo 2 pro z, & unitatem pro T, da-

bit $S_2 = S - \frac{3}{2}$, & ducendo in 8, erit $8S - 12 = 8S_2 = 1 + \frac{1}{9} +$

$$\frac{1}{36}$$

$\frac{1}{36} + \frac{1}{100} + \frac{1}{225} + \&c.$ Et similiter cum Serie in qua Denominatores sunt quadrata numerorum naturalium comparari possunt eæ ubi Denominatores sunt quadrata Pyramidalium, Triangulo-Triangularium, &c. Atque in genere possunt comparari omnes Series quæ definiuntur Æquationibus sequentibus

$$T' = \frac{zz+a}{z+b.z+c} T, T' = \frac{zz+a}{z+b+1.z+c+1} T, T' = \frac{zz+a}{z+b+2.z+c+2} T, \&c.$$

Ubi numerator manet idem, Denominatores autem formantur scribendo continue $z+1$ pro z .

PROPOSITIO X.

Invenire valorem Seriei quam proxime, quæ definitur Æquatione hujus formæ

$$T \times z^q + a z^{q-1} + b z^{q-2} + \&c. = r T' \times z^q + c z^{q-1} + d z^{q-2} + \&c.$$

CASUS I.

Primo fit $r=1$, & fingamus Æquationem ad Seriem esse $T' = \frac{z-m}{z} \times \frac{z-n+1}{z-n} T$. Ponamus esse $S = \frac{z+p}{q} T$ quam proxime, vel $S = \frac{z+p}{q} T + S_2$ accurate: & progrediendo ad valores indeterminatarum succedaneos, erit $S - T = \frac{z+p+1}{q} T' + S_2 - T_2$; harum Æquationum differentia dabit $T = \frac{z+p}{q} T - \frac{z+p+1}{q} T' + T_2$; unde $T_2 = \frac{z+p+1}{q} T' - \frac{z+p-q}{q} T$. Pro T' substitue suum valorem $\frac{z-m}{z} \times \frac{z-n}{z-n+1} T$, atque proveniet $T_2 = \frac{z+p+1}{q} \times \frac{z-m}{z} \times \frac{z-n}{z-n+1} T - \frac{z+p-q}{q} T$: qui reductus ad communem Denominatorem dat

$$T_2 =$$

$$T_2 = \frac{\frac{q-m}{q} \times z z + \frac{m-q \times n-1}{-n-p \times m+1} \left\{ z + m \cdot n \cdot \frac{p+1}{m+1} \right\}}{q \cdot z \cdot z - n + 1} T,$$

Jam quo minor est Summa S_2 , eo proprius quantitas $\frac{z+p}{q} T$ accedet ad valorem ipsius S ; & eo minor erit S_2 , quo minor est Terminus ejus primus T_2 : is vero evadet minimus ubi variabilis z est minimarum dimensionum in Numeratore ejus valoris; nam hic z magna supponitur: ponantur ergo Coefficientes dignitatum z^2 & z nihilo æquales, & habebuntur duæ Æquationes $q-m=0$, atque $\frac{m-q \times n-1}{-n-p \times m+1} = 0$, ad determinandum duas quantitates assumptas p, q . Prima dat $q=m$, ex quâ & secundâ eruitur $p = -\frac{n}{m+1}$. Unde erit

$$T_2 = \frac{n \cdot m - n + 1}{m+1 \cdot z \cdot z - n + 1} T, \text{ atque fere } S = \frac{m+1 \cdot z - n}{m \cdot m + 1} T. \text{ Q. E. I.}$$

Et eadem prorsus ratione invenietur approximatio, ubi Æquatio ad Seriem est $T' = \frac{z z + a z + b}{z z + c z + d} T$, vel magis composita; sed Coefficientes post b , & d in hoc computo non ingrediuntur.

CASUS II.

Sit jam Æquatio $T \times \frac{z z + a z + b}{z z + c z + d} + r T' \times \frac{z z + c z + d}{z z + a z + b} = 0$, existente r numero quolibet, exceptâ unitate. Finge $S = p \times \frac{z+m}{z+n} T + S_2$; dein scribe valores variabilium posteriores pro prioribus, & emerget $S - T = p \times \frac{z+m+1}{z+n+1} T' + S_2 - T_2$, quæ ablata de priore relinquit $T = p \times \frac{z+m}{z+n} T - p \times \frac{z+m+1}{z+n+1} T' + T_2$: hæc Æquatio dabit $T_2 = \frac{z - p z - m p + n}{z + n} T + p \times \frac{z+m+1}{z+n+1} T'$: sed per Æquationem ad Seriem S , est $T' = -\frac{T}{r} \times \frac{z z + a z + b}{z z + c z + d}$; quo scripto pro T' , prodit

$$T_2 =$$

$T_2 = \frac{z-pz-mp+n}{z+n} T - \frac{pT}{r} \times \frac{z+m+1}{z+n+1} \times \frac{zz+az+b}{zz+cz+d}$ Si hujus valoris membra reducantur ad communem Denominatorem, & ponantur Coefficientes trium altissimarum dignitatum ipsius z æquales nihil; Æquatio prima dabit $rp+p=r$, secunda $\frac{m-n}{r+1} \times r+1=c-a$, tertia denique $\frac{c-a}{r+1} \times \frac{z+n+1}{z+n} + d-b = \frac{m-n}{r+1} \times \frac{rc+rn+r+n}{z+n} + ma$: & hæ tres Æquationes dant $p = \frac{r}{r+1}$, $m = c - \frac{b-d}{a-c} - \frac{1}{r+1}$, & $n = m + \frac{a-c}{r+1}$. Dantur itaque Quantitates assumptæ p , m , & n ; atque exinde etiam Quantitas $p \times \frac{z+m}{z+n} T$ quæ proxime æqualis est Seriei S. Q. E. I.

PROPOSITIO XI.

Si $T' = \frac{z-m}{z} \times \frac{z-n}{z-n+1} T$ sit Æquatio exhibens relationem Terminorum Seriei S, pone

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{m} \times \frac{m}{m+1} \times \frac{n}{z} \times \frac{m-n+1}{z-n+1} T, \\ T_3 &= \frac{2}{m+2} \times \frac{m+1}{m+3} \times \frac{n+1}{z+1} \times \frac{m-n+2}{z-n+2} T_2, \\ T_4 &= \frac{3}{m+4} \times \frac{m+2}{m+5} \times \frac{n+2}{z+2} \times \frac{m-n+3}{z-n+3} T_3, \\ T_5 &= \frac{4}{m+6} \times \frac{m+3}{m+7} \times \frac{n+3}{z+3} \times \frac{m-n+4}{z-n+4} T_4, \\ T_6 &= \frac{5}{m+8} \times \frac{m+4}{m+9} \times \frac{n+4}{z+4} \times \frac{m-n+5}{z-n+5} T_5, \\ &\quad \&c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Eritque } S &= \frac{m+1 \cdot z-1 \cdot n}{m \cdot m+1} T + \\ &\quad \frac{m+3 \cdot z+2-2 \cdot n+1}{m+2 \cdot m+3} T_2 + \\ &\quad \frac{m+5 \cdot z+4-3 \cdot n+2}{m+4 \cdot m+5} T_3 + \\ &\quad \frac{m+7 \cdot z+6-4 \cdot n+3}{m+6 \cdot m+7} T_4 + \\ &\quad \frac{m+9 \cdot z+8-5 \cdot n+4}{m+8 \cdot m+9} T_5 + \\ &\quad \&c. \end{aligned}$$

Per Propositionem præcedentem quantitas $\frac{m+1 \cdot z - n}{m \cdot m+1} T$ proxime æqualis est Seriei S. Sit ergo $S = \frac{m+1 \cdot z - n}{m \cdot m+1} T + S_2$ accurate, & invenies $T_2 = \frac{1}{m} \times \frac{m}{m+1} \times \frac{n}{z} \times \frac{m-n+1}{z-n+1} T$, atque $T'_2 = \frac{z-m}{z+1} \times \frac{z-n}{z-n+2} T_2$ Æquationem ad Terminos Seriei S_2 : ex qua data, per Propositionem priorem eruitur quantitas $\frac{m+3 \cdot z + 2 \cdot n - 2n+1}{m+2 \cdot m+3} T_2$ proxime æqualis Seriei S_2 . Dein assumendo $S_2 = \frac{m+3 \cdot z + 2 \cdot n - 2n+1}{m+2 \cdot m+3} T_2 + S_3$, invenietur $T_3 = \frac{2}{m+2} \times \frac{m+1}{m+3} \times \frac{n+1}{z+1} \times \frac{m-n+1}{z-n+1} T_2$; & $T'_3 = \frac{z-m}{z+2} \times \frac{z-n}{z-n+3} T_3$ Æquatio ad Terminos Seriei S_3 : unde comperies quantitatem $\frac{m+5 \cdot z + 4 \cdot n - 3 \cdot n+2}{m+4 \cdot m+5} T_3$ proxime æqualem Seriei S_3 . Et sic porro proceditur. Igitur primus Terminus in valore ipsius S proxime æquatur ipsi S; atque Terminus secundus proxime æquatur ipsi S_2 ; tertius vero proxime æquatur ipsi S_3 ; & ita in reliquis: hoc est, Terminus primus proxime æqualis est Seriei cujus valor quæritur; secundus proxime æqualis est defectui primi Terminum a vero; tertius proxime æqualis est defectui duorum primorum a vero; quartus proxime æqualis est defectui trium primorum a vero; & sic deinceps. Igitur valor Summæ S est verus & celerrime convergens. Q. E. D.

Corollarium. Abrumpet valor Seriei S hic exhibitus, ubi n vel $m - n + 1$ est nihil aut numerus integer & negativus: atque in aliis casibus abibit in infinitum ad veritatem quam celerrime accelerans præterquam ubi, propter m nihil aut negativam, valor Seriei est infinite magnus.

EXEMPLUM I.

Quæratu valor Seriei $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \&c.$ Æquatio definiens relationem Terminorum est $T' = \frac{z-1}{z} \times \frac{z-1}{z} T$, existen-

tibus

tibus 2, 3, 4, 5, &c. valoribus indeterminatæ z . Hæc autem collata cum Æquatione in Theoremate dat $m=1$, $n=1$; quibus scriptis prodeunt

$$T_2 = \frac{T}{2z}, T_3 = \frac{8T_2}{6 \cdot z + 1}, T_4 = \frac{27T_3}{10 \cdot z + 2}, T_5 = \frac{64T_4}{14 \cdot z + 3}, \&c.$$

$$\text{Et } S = \frac{2z-1}{2} T + \frac{2z+2}{6} T_2 + \frac{2z+5}{10} T_3 + \frac{2z+8}{14} T_4 + \frac{2z+11}{18} T_5 + \&c.$$

Collige jam decem Terminos initiales, eorumque aggregatum reperies 1.5497.6773.1166.5406.9. Tum pro z scribe ejus valorem decimum primum, five 12; & Terminum decimum primum $\frac{1}{121}$ pro T ; atque per computum invenies

T = .0082.6446.2809.9173.55	.0950.4132.2314.0495.8
T ₂ = - - - 2869.6051.4233.24	1.2434.9556.1677.4
T ₃ = - - - - 22.6398.8277.97	65.6556.6006.1
T ₄ = - - - - - 3118.7593.62	7128.5928.3
T ₅ = - - - - - - 63.3652.70	123.2102.5
T ₆ = - - - - - - - 1.7188.93	2.9690.0
T ₇ = - - - - - - - - 583.96	920.9
T ₈ = - - - - - - - - - 23.78	34.9
T ₉ = - - - - - - - - - - 1.12	1.5
	S = .0951.6633.5681.6857.4

Ex hoc computo habemus $S = .0951.6633.5681.6857.4$, quæ adjecta aggregato initialium, exhibet 1.6449.3406.6848.2264.3 pro valore Seriei propositæ.

EXEMPLUM II.

Summanda fit Series $1 + \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 3} A + \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 5} B + \frac{5 \cdot 5}{6 \cdot 7} C + \frac{7 \cdot 7}{8 \cdot 9} D + \frac{9 \cdot 9}{10 \cdot 11} E + \&c.$

Æquatio eandem denotans est $T' = \frac{z - \frac{1}{2}}{z} \times \frac{z - \frac{1}{2}}{z + \frac{1}{2}} T$, uti patebit scribendo valores 1, 2, 3, 4, &c. successive pro z . Æquatio autem in Theoremate collata cum hac, dat $m = \frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{2}$, adeoque

$$T_2 =$$

$$T_2 = \frac{2.1.1}{1.3.z.2z+1} T, T_3 = \frac{2.4.9}{5.7.z+1.2z+3} T_2, T_4 = \frac{2.9.25}{9.11.z+2.2z+5} T_3, \\ \&c.$$

$$\text{Et } S = \frac{6.z-1.2}{1.3} T + \frac{14.z+2-3.4}{5.7} T_2 + \frac{22.z+4-5.6}{9.11} T_3 + \&c.$$

Per additionem reperies Summam decem Terminorum initialium esse 1.3916.94645943.2880.5; dein ut eruatur Summa reliquorum scribe 11 pro z , & Terminum decimum primum pro T , & habebis

T	= .0083.9003.5809.6168.15	.1789.9383.0605.1587.3
T_2	= 2210.8921.7644.71	1.0738.6191.4274.3
T_3	= 15.1604.0349.56	45.9406.1665.3
T_4	= 1963.2742.16	4570.9051.0
T_5	= 38.8835.92	76.0818.3
T_6	= 1.0484.94	1.8104.4
T_7	= 358.18	562.5
T_8	= 14.77	21.5
T_9	= 71	1.0

$$S = .1791.0168.0851.6085.6$$

Addatur nunc S aggregato initialium, & prodibit 1.5707.9632.6794.8966.1 pro valore Seriei, id est, pro semiperiferia Circuli, cujus Diameter est unitas.

EXEMPLUM III.

Proponatur jam Series $\frac{1}{3} + \frac{1.3}{2.7} A + \frac{3.7}{4.11} B + \frac{5.11}{6.15} C + \frac{7.15}{8.19} D \&c.$

quæ definitur Æquatione $T' = \frac{z-\frac{1}{2}}{z} \times \frac{z-\frac{1}{4}}{z+\frac{3}{4}} T$, in qua 1, 2, 3, 4, &c.

sunt valores indeterminatæ z . Et erit $m = \frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{4}$; & propterea

$$T_2 = \frac{5.1.1}{6.z.4z+3} T, T_3 = \frac{9.2.3}{14.z+1.4z+7} T_2, T_4 = \frac{13.3.5}{22.z+2.4z+11} T_3, \\ \&c.$$

$$\text{Et } S = \frac{6.z-1.1}{1.3} T + \frac{14.z+2-2.5}{5.7} T_2 + \frac{22.z+4-3.9}{9.11} T_3 + \&c.$$

Colligo

Colligo jam novem Terminos initiales, quorum Summa prodit .5055.0041.4718.3195.8, & scribens 10 pro z , decimum vero Terminum pro T , habeo

$T =$	.0047.5565.5924.4791.67	.0935.2789.9848.0902.9
$T_2 =$	921.6387.4505.41	4160.5406.2053.0
$T_3 =$	6.8760.0058.48	19.5167.2893.3
$T_4 =$	995.8557.00	2185.7755.9
$T_5 =$	22.0991.75	40.9826.8
$T_6 =$	6653.41	1.0937.5
$T_7 =$	252.54	379.0
$T_8 =$	11.51	16.1
$T_9 =$	61	8
		$S = .0935.6970.2649.4765.3$

Summa denique initialium addita ipsi S , conficit .5990.7011.7367.7961.1 pro valore Seriei, id est, pro Ordinata Curvæ Elasticæ. Et hunc numerum *Jacobus Bernoullius* recte invenit contineri intra limites .5983 & .6004.

EXEMPLUM IV.

Proponatur Series $1 + \frac{1.1}{2.5} A + \frac{3.5}{4.9} B + \frac{5.9}{6.13} C + \frac{7.13}{8.17} D + \frac{9.17}{10.21} E + \&c.$

quæ definitur Æquatione $T' = \frac{z - \frac{1}{2}}{z} \times \frac{z - \frac{3}{2}}{z + \frac{1}{2}} T$, existentibus 1, 2, 3 4,

&c. valoribus indeterminatæ succedentibus. Est vero $m = \frac{1}{2}$, $n = \frac{3}{4}$;

& proinde

$$T_2 = \frac{1.1.3}{2.2.4z+1} T, T_3 = \frac{3.2.7}{10.z+1.4z+5} T_2, T_4 = \frac{5.3.11}{18.z+2.4z+9} T_3, \&c.$$

$$\text{Et } S = \frac{2z-1}{1} T + \frac{2z+2}{5} T_2 + \frac{2z+5}{9} T_3 + \frac{2z+8}{13} T_4 + \frac{2z+11}{17} T_5 + \&c.$$

Summa novem Terminorum initialium est 1.2157.0599.7306.1360.6. Et ut habeatur Summa reliquorum, pone 10 pro z , & decimum Terminum pro T , ac per computum obtinebis

Q

T =

T	= .0050.1271.8406.8834.46	.0952.4164.9730.7854.7
T ₂	= - - - 1833.9213.6837.20	8069.2540.2083.7
T ₃	= - - - - 15.5605.4494.38	43.2237.3595.5
T ₄	= - - - - - 2425.8219.16	5224.8472.0
T ₅	= - - - - - - 56.8742.44	103.7118.6
T ₆	= - - - - - - - 1.7922.51	2.9017.4
T ₇	= - - - - - - - - 707.95	1047.8
T ₈	= - - - - - - - - - 33.45	46.1
T ₉	= - - - - - - - - - - 1.83	2.3
		S = .0953.2277.9839.9238.1

Adjiciatur jam S aggregato initialium, & obtinebis
 1.3110.2877.7146.0598.7 pro valore Seriei, id est, pro longitudine
 Curvæ Elasticæ, modo in lineam rectam extensa foret. Hunc autem
 numerum determinavit *Bernoullius* consistere inter limites 1.308 & 1.315.
 Quod si longitudini Elasticæ adjiciatur sua Ordinata, habebitur nume-
 rus 1.9100.9889.4513.8559.8 qui est semiperiferia Ellipseos habentis
 1 & $\sqrt{2}$ pro Axibus. Et hæc Exempla sufficiant; haud enim immo-
 ror Seriebus quæ per hanc Propositionem summari possint accurate.

SCHOLIUM.

Hoc Theorema nullo fere negotio exhibet Areas Curvarum binomi-
 alium quarum Ordinatae continentur sub forma $x^e \times e + f x^n$, in unico
 tamen casu, scilicet ubi est $e + f x^n = 0$, five $x^n = -\frac{e}{f}$; hoc est in eo
 casu in quo Series pro Area convergit lentissime. Sed ubi Areæ non
 producendæ sunt ultra octo aut novem figuras, sufficit quærere Sum-
 mam quatuor Terminorum initialium, nam S dabit eam reliquorum ex-
 iguo labore; imo si nulli Termini initiales colligantur, sed inchoetur
 transmutatio ad primum Terminum, valor ipsius S approximabit ad
 valorem totius Seriei sat celeriter. Series autem in Theoremate, red-
 ditur generalior, atque extenditur ad casus qui ad Quadraturas non at-
 tinent, ut sequitur. Sit Æquatio ad Seriem $T' = \frac{zz + m}{zz + nz + r} T$, &
 ponatur

$$a = n - \frac{r-m}{n}$$

$$b = n + 2 - \frac{r-m+n+1}{n+2},$$

$$c = n + 4 - \frac{r-m+2n+4}{n+4},$$

$$d = n + 6 - \frac{r-m+3n+9}{n+6},$$

$$e = n + 8 - \frac{r-m+4n+16}{n+8},$$

&c.

$$T_2 = \frac{T}{n-1} \times \frac{ma+n-a \times r}{zz+nz+r},$$

$$T_3 = \frac{T_2}{n+1} \times \frac{mb+n-b+2 \times r+n+1}{zz+n+2.z+r+n+1},$$

$$T_4 = \frac{T_3}{n+3} \times \frac{mc+n-c+4 \times r+2n+4}{zz+n+4.z+r+2n+4},$$

$$T_5 = \frac{T_4}{n+5} \times \frac{md+n-d+6 \times r+3n+9}{zz+n+6.z+r+3n+9},$$

$$T_6 = \frac{T_5}{n+7} \times \frac{me+n-e+8 \times r+4n+16}{zz+n+8.z+r+4n+16},$$

&c.

Eritque S =

$$\frac{z+a-1}{n-1} T + \frac{z+b-1}{n+1} T_2 + \frac{z+c-1}{n+3} T_3 + \frac{z+d-1}{n+5} T_4 + \frac{z+e-1}{n+7} T_5 + \dots$$

EXEMPLUM

$$\text{Proponatur Series } \frac{1}{2} + \frac{1.1}{2.4} A + \frac{3.3}{4.6} B + \frac{5.5}{6.8} C + \frac{7.7}{8.10} D + \frac{9.9}{10.12} E \&c.$$

quæ definitur Æquatione $T' = \frac{z}{z+\frac{1}{2}} \times \frac{z}{z+\frac{3}{2}} T$, existentibus $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$,

$\frac{7}{2}$, &c. valoribus Abscissæ z successivis. Hæc Æquatio comparari ne-

quit cum $T' = \frac{z-m}{z} \times \frac{z-n}{z-n+1} T$, eâ scilicet in Propositione; in qua

utique sunt duo factores $z-m$, & $z-n+1$ unitate differentes; quorum alter est in Numeratore, alter in Denominatore: quum tamen in Æquatione propositam Seriem definiente differentiae factorum in Numeratore &

Denominatore sint $\frac{1}{2}$ & $\frac{3}{2}$. Igitur multiplico factores in se, & pro-

dit $T' = \frac{zz}{zz+2z+\frac{3}{4}} T$, & pergo ad Æquationem in Scholio; quam

cum altera comparans, habeo $m=0$, $n=2$, & $r=\frac{3}{4}$; & hisce scriptis oriuntur

$a =$

$$a = \frac{13}{8},$$

$$T_2 = \frac{1}{8} \times \frac{9}{4zz+8z+3} T,$$

$$b = \frac{49}{16},$$

$$T_3 = \frac{3}{16} \times \frac{25}{4zz+16z+15} T_2,$$

$$c = \frac{109}{24},$$

$$T_4 = \frac{5}{24} \times \frac{49}{4zz+24z+35} T_3,$$

$$d = \frac{193}{32},$$

$$T_5 = \frac{7}{32} \times \frac{81}{4zz+32z+63} T_4,$$

$$e = \frac{301}{40},$$

$$T_6 = \frac{9}{40} \times \frac{121}{4zz+40z+99} T_5,$$

&c.

&c.

$$\text{Et } S = \frac{8z+5}{1.8} T + \frac{16z+33}{3.16} T_2 + \frac{24z+85}{5.24} T_3 + \frac{32z+161}{7.32} T_4 + \&c.$$

Quære jam aggregatum sex Terminorum initialium, idemque prodibit .6106.6818.2373.0. Tum substitue septimum Terminum pro T , & valorem septimum $\frac{13}{2}$ pro z ; & per calculum invenies

$$T = .0036.3492.9656.98$$

$$.0258.9887.3806.0$$

$$T_2 = 1825.5785.11$$

$$5210.5053.3$$

$$T_3 = 29.7131.92$$

$$59.6739.9$$

$$T_4 = 8425.62$$

$$1.3879.7$$

$$T_5 = 339.30$$

$$491.0$$

$$T_6 = 17.50$$

$$23.1$$

$$T_7 = 1.09$$

$$1.3$$

$$S = .0259.5158.9994.3$$

Inventa hoc modo S , eadem addatur Summæ initialium & prodibit .6366.1977.2367.3 pro valore Seriei propositæ. Si vero unitas dividatur per hunc numerum, quotus dabit Aream Circuli. Et eadem ratione transmutantur Series quæ definiuntur Æquatione hujusmodi $T' =$

$$\frac{z^3+az^2+bz+c}{z^3+dz^2+ez+f} T, \text{ vel etiam generaliori. Et notandum est Æqua-}$$

tionem in Scholio $T' = \frac{zz+m}{zz+nz+r} T$, non ad pauciores casus ideo extendi quod in Numeratore desit membrum in quo z est unius dimensionis: illud enim semper tolli potest mutando principium Abscissæ, eo-que pacto Theorema redditur simplicius.

PROP-

PROPOSITIO XII.

Oporteat transmutare Seriem definitam Æquatione hujus formæ

$T \times z^0 + a z^0 - 1 + b z^1 - 2 + c z^2 + r T' \times z^0 + c z^0 - 1 + d z^1 - 2 + \mathcal{E}c. = 0.$
in aliam celerrime convergentem.

Affume $m = c - \frac{b-d}{a-c} - \frac{1}{r+1}$, $n = m + \frac{a-c}{r+1}$; atque per Propositionem decimam erit $\frac{r}{r+1} \times \frac{z+m}{z+n} T$ proxime æqualis Seriei. Sit itaque quantitas illa primus Terminus Seriei transmutatæ: & ad inveniendum secundum, ponatur $S = \frac{r}{r+1} \times \frac{z+m}{z+n} T + S_2$; deinde per Propositionem nonam quæratür Æquatio ad Terminos Seriei S_2 ; & ex illa eliciatur quantitas proxime æqualis Seriei S_2 , eodem prorsus modo ac approximatío ad Seriem S prius inventa fuit; & quantitas illa erit secundus Terminus Seriei transmutatæ: ac progrediendo super hisce vestigiis, invenire licet Terminos sequentes tot quot volueris. Q. E. I.

EXEMPLUM I

Transmutanda sit Series $\sqrt{12}$ in $1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 9} - \frac{1}{7 \cdot 27} + \frac{1}{9 \cdot 81} - \frac{1}{11 \cdot 243} +$
&c. quam adhibuit *Halleius* in Quadratura Circuli. Relatio Terminorum definitur Æquatione $zT + 3T' \frac{z+1}{z+1} = 0$, in qua valores ipsius z sunt $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}$, &c. Comparando autem hanc cum Æquatione in

Problemate, erit $r=3$, $a=0$, $b=0$, $c=1$, $d=0$; & inde $m = \frac{3}{4}$,

$n = \frac{1}{2}$; quibus scriptis habebitur $\frac{3}{4} \times \frac{4z+3}{4z+2} T$ pro primo Terminò Seriei transmutatæ.

Finge $S = \frac{3}{4} \times \frac{4z+3}{4z+2} T + S_2$, tum scribendo valores variabilium suc-

R

cedentes

cedentes pro antecedentibus, proveniet $S - T = \frac{3}{4} \times \frac{4z+7}{4z+6} T' + S_2 =$
 T_2 , quarum $\text{\AE}quationum$ differentia dabit $T = \frac{3}{4} \times \frac{4z+3}{4z+2} T - \frac{3}{4} \times$
 $\frac{4z+7}{4z+6} T' + T_2$, & exinde $T_2 = \frac{1}{4} \times \frac{4z-1}{4z+2} T + \frac{3}{4} \times \frac{4z+7}{4z+6} T'$. Sed
per $\text{\AE}quationem$ ad Seriem est $T' = -\frac{1}{3} T \times \frac{z}{z+1}$; quo substituto,
obtenebis $T_2 = -\frac{1}{8} \times \frac{1}{2z+1} \times \frac{2}{2z+2} \times \frac{3}{2z+3} T$. In quo valore scri-
bendo quantitates variables posteriores pro prioribus, emerget $T'_2 =$
 $-\frac{1}{8} \times \frac{1}{2z+3} \times \frac{2}{2z+4} \times \frac{3}{2z+5} T'$, vel substituendo $-\frac{1}{3} T \times \frac{z}{z+1}$ pro
 T' , eveniet $T'_2 = +\frac{1}{8} \times \frac{1}{2z+3} \times \frac{2}{2z+4} \times \frac{1}{2z+5} \times \frac{z}{z+1} T$; per hunc
valorem ipsius T'_2 , est $T = \frac{2}{z} \times \frac{1}{2z+2} \times \frac{1}{2z+3} \times \frac{1}{2z+4} \times \frac{1}{2z+5} T'_2$: Et
per valorem ipsius T_2 antea repertum est $T = -\frac{4}{3} \times \frac{1}{2z+1} \times \frac{1}{2z+2} \times$
 $\frac{1}{2z+3} T_2$. Denique æquando hosce duos valores, Termini T , prodibit
 $zz + \frac{1}{2}z \times T_2 + 3T'_2 \times zz + \frac{9}{2}z + 5 = 0$, $\text{\AE}quatio$ utique ad Termi-
nos Seriei S_2 ; quæ collata cum illa in Propositione dat $r=3$, $a=$
 $\frac{1}{2}$, $b=0$, $c=\frac{9}{2}$, $d=5$; hinc fit $m=3$, $n=2$; & proinde erit
 $\frac{3}{4} \times \frac{z+3}{z+2} T_2$ proxime æqualis Seriei S_2 ; adeoque Terminus secundus
Seriei transmutatæ.

Ad inveniendum tertium assumatur $S_2 = \frac{3}{4} \times \frac{z+3}{z+2} T_2 + S_3$, & in-
de per methodum Differentialem erit $S_2 - T_2 = \frac{3}{4} \times \frac{z+4}{z+3} T'_2 + S_3$
 $- T_3$, qua de priore subducta, manet $T_2 = \frac{3}{4} \times \frac{z+3}{z+4} T_2 - \frac{3}{4} \times \frac{z+4}{z+3} T'_2$
 $+ T_3$, ex qua oritur $T_3 = \frac{1}{4} \times \frac{z-1}{z+2} T_2 + \frac{3}{4} \times \frac{z+4}{z+3} T'_2$. Sed per

$\text{\AE}qua-$

Æquationem ad Seriem S_2 , est $T'_2 = -\frac{1}{3} \times \frac{z}{z+2} \times \frac{2z+1}{2z+5} T_2$; quo substituto in valore ipsius T_3 , provenit $T_3 = -\frac{1}{8} \times \frac{4}{2z+4} \times \frac{5}{2z+5} \times \frac{6}{2z+6} T_2$: ubi scribendo valores variabilium consequentes pro antecedentibus, oriatur $T'_3 = -\frac{1}{8} \times \frac{4}{2z+6} \times \frac{5}{2z+7} \times \frac{6}{2z+8} T'_2$; vel substituendo pro T'_2 suum valorem, erit $T'_3 = \frac{1}{8} \times \frac{4}{2z+6} \times \frac{5}{2z+7} \times \frac{6}{2z+8} \times \frac{1}{3} \times \frac{z}{z+2} \times \frac{2z+1}{2z+5} T_2$. Per valores Terminorum T_3 , & T'_3 , si eliminetur T_2 , resultabit $zz + \frac{1}{2}z T_3 + 3 T'_3 \times zz + \frac{15}{2}z + 14 = 0$, quæ est Æquatio ad Terminos Seriei S_3 ; eaque comparata cum illa in Theoremate exhibet $a = \frac{1}{2}$, $b = 0$, $c = \frac{15}{2}$, $d = 14$; adeoque $m = \frac{21}{4}$, $n = \frac{14}{4}$; & propterea $\frac{3}{4} \times \frac{4z+21}{4z+14} T_3$ erit approximatio ad Seriem S_3 ; five Terminus tertius Seriei transmutatæ.

Et simili processu, ponendo $S_3 = \frac{3}{4} \times \frac{4z+21}{4z+14} T_3 + S_4$, invenies Terminum quartum esse $\frac{3}{4} \times \frac{4z+30}{4z+20} T_4$; existente $T_4 = -\frac{1}{8} \times \frac{7}{2z+7} \times \frac{8}{2z+8} \times \frac{9}{2z+9} T_3$. Atque eadem omnino ratione Series transmutata ad libitum producet. Sed jam Terminorum progressio apparet, existentibus

$$\begin{aligned} T_2 &= -\frac{1}{8} \times \frac{1}{2z+1} \times \frac{2}{2z+2} \times \frac{3}{2z+3} T, \\ T_3 &= -\frac{1}{8} \times \frac{4}{2z+4} \times \frac{5}{2z+5} \times \frac{6}{2z+6} T_2, \\ T_4 &= -\frac{1}{8} \times \frac{7}{2z+7} \times \frac{8}{2z+8} \times \frac{9}{2z+9} T_3, \\ T_5 &= -\frac{1}{8} \times \frac{10}{2z+10} \times \frac{11}{2z+11} \times \frac{12}{2z+12} T_4, \\ &\quad \&c. \end{aligned}$$

$$\text{Ac } S = \frac{3}{4} \ln \frac{4z+3}{4z+2} T + \frac{4z+12}{4z+8} T_2 + \frac{4z+21}{4z+14} T_3 + \frac{4z+30}{4z+20} T_4 + \&c.$$

Summa decem Terminorum initialium est

3.1415.9051.0938.0800.9964.2 ; & decimus primus substitutus pro T,

ac $\frac{21}{2}$ pro z, dant

$$\begin{aligned} + T &= .0000.0279.3565.0014.1347.8 \\ - T_2 &= 172.5274.8297.5 \\ + T_3 &= 1474.5938.7 \\ - T_4 &= 3.8136.0 \\ + T_5 &= 192.2 \\ - T_6 &= 1.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} .0000.0214.2791.3363.1147.5 \\ 1244.1885.8 \\ 171.7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} .0000.0000.0139.7472.6106.4 \\ 3.3215.2 \\ 1.4 \end{aligned}$$

$$+ .0000.0214.2791.4607.3205.0$$

$$- .0000.0000.0139.7475.9323.0$$

Subduc jam Summam negativorum ab ea affirmativorum, & proveniet .0000.0214.2651.7131.3882.0, quæ addita aggregato initialium exhibet 3.1415.9265.3589.7932.3846.2 pro valore Seriei propositæ. Et hi sex Termini Seriei transmutatæ tantundem efficiunt ac trigintaduo Seriei simplicis. Sed horum Theorematum usus latius patet in Seriebus lentissime convergentibus, ad quarum utique valores pervenire non licet per meram additionem Terminorum.

EXEMPLUM II.

Transmutanda fit Series $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} - \frac{1}{36} + \&c.$ cujus

Æquatio est $zzT + \frac{z+1}{z} T' = 0$, existentibus 1, 2, 3, 4, 5, &c. valoribus ipsius z ordine succedentibus. Hic erit $a=0$, $b=0$, $c=2$,

$d=1$, $r=1$; unde $m=1$, $n=0$, & propterea $\frac{1}{2} \times \frac{z+1}{z} T$ est primus Terminus Seriei transmutatæ.

Ut eruatur secundus, finge $S = \frac{1}{2} \times \frac{z+1}{z} T + S_2$; & per methodum Differentialem prodibit $S - T = \frac{1}{2} \times \frac{z+2}{z+1} T' + S_2 - T_2$; quæ

deducta

deducta de priore relinquit $T = \frac{1}{2} \times \frac{z+1}{z} T - \frac{1}{2} \times \frac{z+2}{z+1} T' + T_2$; ex
quâ inveniatur $T_2 = \frac{1}{2} \times \frac{z-1}{z} T + \frac{1}{2} \times \frac{z+2}{z+1} T'$: fed Æquatio ad Seri-
em S dat $T' = \frac{-zzT}{zz+2z+1}$, quo substituto, proveniet $T_2 = -\frac{2z+1}{2z} \times$
 $\frac{T}{z+1^3}$. Scribe jam valores variabilium consequentes pro antecedentibus, & orietur

$$T'_2 = -\frac{2z+3}{2z+2} \times \frac{T}{z+2^3}, \text{ vel rursus ponendo pro } T' \text{ suum valorem,}$$

$$T'_2 = \frac{1}{2} \times \frac{2z+3}{z+1^3} \times \frac{zz}{z+2^3} T. \text{ Per valores Terminorum } T_2 \text{ \& } T'_2, \text{ ex-}$$

termina T, & habebis $z^4 + \frac{3}{2} z^3 \times T_2 + z^4 + \frac{13}{2} z^3 + 15z^2 + 14z + 4 \times$
 T'_2 , quæ est Æquatio ad Terminos Seriei S₂: eaque collata cum illa
in Propositione, dat $a = \frac{3}{2}$, $b = 0$, $c = \frac{13}{2}$, $d = 15$, $r = 1$; & pro-

inde $m = 3$, $n = \frac{1}{2}$; quapropter est $\frac{z+3}{2z+1} T_2$ valor Seriei S₂ quam-
proxime, five Terminus secundus Seriei transmutatæ. Atque super
hisce vestigiis progrediendo ut in Exemplo superiore, invenies

$$T_2 = -\frac{2z+1}{2z} \times \frac{T}{z+1^3}, T_3 = -\frac{2z+2}{2z+1} \times \frac{8T_2}{z+2^3}, T_4 = -\frac{2z+3}{2z+2} \times \frac{27T_3}{z+3^3}, \&c.$$

$$\text{Ac } S = \frac{z+1}{2z} T + \frac{z+3}{2z+1} T_2 + \frac{z+5}{2z+2} T_3 + \frac{z+7}{2z+3} T_4 + \&c.$$

Vel ob faciliorem computum, pone

$$A = T, B = \frac{A}{z+1^3}, C = \frac{8B}{z+2^3}, D = \frac{27C}{z+3^3}, E = \frac{64D}{z+4^3}, \&c.$$

$$\text{Eritque } S = \frac{1}{2z} \text{ in } z+1 A - \frac{1}{z+3} B + \frac{1}{z+5} C - \frac{1}{z+7} D + \frac{1}{z+9} E - \&c.$$

Summa decem Terminorum Seriei summandæ sub propriis signis est
.8179.6217.5610.98513. Tum ut habeatur Summa reliquorum substi-
tue Terminum decimum primum, hoc est, $\frac{1}{121}$ pro T, & pro z va-
lorem suum respectivum, scilicet 11; ac habebis

S

A =

$$A = \frac{1}{121}, B = \frac{1.1.1}{12.12.12} A, C = \frac{2.2.2}{13.13.13} B, D = \frac{3.3.3}{14.14.14} C, \&c.$$

$$\text{Et } S = \frac{1}{11} \text{ in } 6A - 7B + 8C - 9D + 10E - \&c.$$

Computus autem sic se habet

$$A = .0082.6446.2809.9173.5$$

$$B = 478.2675.2372.2$$

$$C = 1.7415.2944.5$$

$$D = 171.3604.0$$

$$E = 3.2495.0$$

$$F = 991.7$$

$$G = 43.6$$

$$H = 2.6$$

$$I = .2$$

Deinde

$$.0495.8677.6859.5041.0$$

$$13.9322.3556.0$$

$$32.4950.0$$

$$523.2$$

$$2.8$$

$$+ .0495.8691.6214.4073.0$$

$$.0000.3347.8726.6605.4$$

$$1542.2436.0$$

$$1.0908.7$$

$$33.8$$

$$- .0000.3348.0296.9983.9$$

Differentia harum Summarum divisa per 11, dat S =

.0045.0485.7813.1280.8, quæ adjecta aggregato decem initialium, conficit .8224.6703.3424.1132.1 pro valore Seriei. Quumque hic numerus dimidium sit illius in Exemplo primo Propositionis decimæ reperti; concludendum est utrumque computum recte institutum fuisse.

Etenim Series $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \&c.$ ubi Termini sunt alternatim

negativi & affirmativi, dimidium est hujus $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \&c.$ in qua omnes sunt ejusdem signi.

EXEMPLUM III.

Proponatur Series $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \&c.$ quæ definitur

Æquatione $zT + \frac{1}{z+1}T' = 0$, in qua valores Abscissæ sunt $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2},$

$\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}$, &c. Et ineundo computum juxta hanc Propositionem, deveniatur ad regulam sequentem. Pone $A = T$, deinde

$$B = \frac{1}{2} A \times \frac{1}{2z+1} \times \frac{1}{z+1^2},$$

$$C = \frac{1}{2} B \times \frac{2}{2z+3} \times \frac{9}{z+2^2},$$

$$D = \frac{1}{2} C \times \frac{3}{2z+5} \times \frac{25}{z+3^2},$$

$$E = \frac{1}{2} D \times \frac{4}{2z+7} \times \frac{49}{z+4^2},$$

&c.

Eritque $S = \frac{1}{4z}$ in $\frac{1}{2z+1}A - \frac{1}{2z+3}B + \frac{1}{2z+5}C - \frac{1}{2z+7}D + \frac{1}{2z+9}E - \&c.$

Summa duodecem Terminorum in Serie proposita est

.7646.0069.1481.8329.5, atque Terminus decimus tertius $\frac{1}{25} = T$, &

$z = \frac{25}{2}$, quibus scriptis, habemus $A = \frac{1}{25}$,

$$B = \frac{1.1.1}{13.27.27} A, B = \frac{2.3.3}{14.29.29} B, D = \frac{3.5.5}{15.31.31} C, E = \frac{4.7.7}{16.33.33} D, \&c.$$

ac $S = \frac{1}{25}$ in $13 A - 15 B + 17 C - 19 D + 21 E - \&c.$

A =	.0400.0000.0000.0000.0
B =	422.0744.9614.9
C =	6452.6422.0
D =	33.5725.4
E =	3776.5
F =	73.4
G =	2.2
H =	1

.5200.0000.0000.0000.0	.0000.6331.1174.4223.5
10.9694.9174.0	637.8782.6
7.9306.5	1688.2
55.0	2.7
+ .5200.0010.9702.5835.5	- .0000.6331.1812.4697.0

Dein

Dein dividendo differentiam Summarum per 25, prodit $S = .0207.9747.1915.6153.5$, quæ una cum aggregato initialium conficit $.7853.9816.3397.4483.0$ pro valore Seriei summandæ.

SCHOLIUM.

Sicut una Æquatio definit Series numero infinitas, ita una Transmutatio inservit Seriebus numero infinitis: Et unumquodque Exemplum pro Theoremate est habendum; sic Transmutatio in ultimo Exempli inservit Seriei generali

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{m+n} + \frac{1}{m+2n} - \frac{1}{m+3n} + \frac{1}{m+4n} - \&c.$$

Observandum est legem continuandi Series per hanc Propositionem transmutatas, non semper se prodere ut in Exemplis quæ hic elegi: hoc vero neutiquam incommodabit opus. Nam postquam colliguntur sex circiter Termini Seriei summandæ, tres vel quatuor Seriei transmutatæ dabunt quæsitum satis accurate pro usibus quibuscunque; in praxi enim raro opus est continuare computum ultra novem aut decem figuras. Atque eodem res redit, si Termini Seriei transmutandæ sint iisdem vel contrariis signis affecti, si sint vel non sint assignabiles. Labor enim semper erit levis, præterquam ubi in Æquatione ad Seriem, quantitas r est negativa & simul proxime æqualis unitati; ut si sit $r = -\frac{9}{10}$, vel $= -\frac{99}{100}$, computus erit laboriosus. Sed hosce casus facile evitabit Analysta peritus, quibus igitur remedium proferre non est operæ pretium.

Adjungerem quoque nonnulla de Seriebus hujusmodi

$$x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \&c.$$

$$x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \&c.$$

Ubi Termini in infinitum producti non habent datam rationem ad se invicem, ut in Seriebus de quibus hætenus egimus, sed antecedentes sunt infinite majores consequentibus. Hæ exhibent Numerum ex dato Logarithmo, vel Sinum ex dato Arcu, & sunt sui generis simplicissimæ. Transmutari possunt per principia in superioribus posita; cæterum res commodius absolvitur absque Transmutationibus. Ut in Serie $x +$

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \&c. \text{ quæ exhibet Numerum ex dato Logarithmo}$$

arithmo x , si esset $x = 12.3785$, rejicerem Characteristicam 12, & quærerem Numerum Logarithmi .3785 qui prodiret in Serie celeriter convergente ob Logarithmum jam unitate minorem; quo dato non lateret Numerus Logarithmi 12.3785. Et eodem res redit sive Logarithmus sit Tabularis sive Hyperbolicus.

Et similiter in quærendo Sinum ex dato Arcu, si idem major sit Quadrante, subducatur ex Semicirculo, & manebit Arcus Quadrante minor eundem habens Sinum ac prior, utique ejus supplementum ad Semicirculum. Arcus autem minor Quadrante dabit suum Sinum in Serie celeriter convergente.

Series quæ definiuntur Æquationibus quæ involvunt tres vel plures Terminos Seriei possunt summi accurate vel quamproxime ex Analyfi supra tradita: sufficiat autem hujusmodi computationum jecisse fundamentum & aperuisse viam aliis quibus est otium & animus hâc de materiâ plura scutari. Sed ne omnino neglecta videatur, dabimus Theorema generale ex principiis *Moirvai*, quod tam ad Summationem quam ad Transmutationem hujus generis Serierum extenditur.

PROPOSITIO XIII.

In Seriebus ex Divisione ortis, eadem est relatio inter Terminos ac Summas successivas.

Sit Fractio $\frac{1}{1-3x+xx}$, quæ in Seriem resoluta est
 $1+3x+8x^2+21x^3+55x^4+\&c.$ Tum Summæ successivæ erunt

$$\frac{1}{1-3x+xx} = 1+3x+8x^2+21x^3+55x^4+144x^5+\&c.$$

$$\frac{3x-xx}{1-3x+xx} = 3x+8x^2+21x^3+55x^4+144x^5+\&c.$$

$$\frac{8x^2-3x^3}{1-3x+xx} = 8x^2+21x^3+55x^4+144x^5+\&c.$$

$$\frac{21x^3-8x^4}{1-3x+xx} = 21x^3+55x^4+144x^5+\&c.$$

$$\frac{55x^4-21x^5}{1-3x+xx} = 55x^4+144x^5+\&c.$$

&c.

T

Et

Et sensus Propositionis est quod hæ Summæ eodem numero sumptæ eandem ubique habent relationem ac Termini Seriei totidem numero sumpti. Exempli gratiâ, in casu præsentè relatio inter tres quosvis Terminos ordine succedentes erit $xxT - 3xT' + T'' = 0$: atque ea de causa relatio inter tres Summas successivas erit etiam $xxS - 3xS' + S'' = 0$, ut experienti patebit. Propositio vero sic demonstratur.

Sint r, s, t datæ quantitates, & assumatur Æquatio ad Summas $rS + sS' + tS'' = 0$, dein substituendo valores variabilium succedentes pro præsentibus, habebitur $rS' + sS'' + tS''' = 0$, quæ subducta de priori, relinquit $rS - rS' + sS' - sS'' + tS'' - tS''' = 0$; in hæc substitue T pro $S - S'$, T' pro $S' - S''$, ac T'' pro $S'' - S'''$, & proveniet $rT + sT' + tT'' = 0$. Et hæc est eadem relatio ac ea Summarum primo assumpta. Et si plures vel pauciores sint Summæ, eodem prorsus modo Propositio demonstrabitur.

Corollarium. Hinc habemus methodum summandi hæc Series ex data relatione Terminorum; ut sequentibus Exemplis fiet manifestum.

EXEMPLUM I.

Detur Æquatio ad Terminos $rT + sT' = 0$, & per hanc Propositionem erit etiam eadem relatio Summarum, utique $rS + sS' = 0$; pro S' substitue suum valorem $S - T$, & orietur $rS + sS - sT = 0$, unde fit $S = \frac{s}{r+s} T$. Quare datur Summa S ex dato ejus primo Termino T . Ut si Series sit

$$1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} + \frac{8}{x^3} + \frac{16}{x^4} + \frac{32}{x^5} + \&c.$$

ejus Æquatio est $2T - xT' = 0$, erit $r = 2, s = -x$; quibus scriptis, prodibit $S = \frac{-x}{2-x} T$, vel $S = \frac{x}{x-2} T$. Substituatur jam quilibet Terminus pro T , & $\frac{x}{x-2} T$ erit Summa ejus & omnium sequentium usque in infinitum. Sit T æqualis primo Termino nempe unitati, & habebitur $\frac{x}{x-2}$ pro valore totius Seriei.

EXEMPLUM II.

Ad eundem modum si Æquatio ad tres Terminos sit $rT + sT' + tT'' = 0$, relatio Summarum erit $rS + sS' + tS'' = 0$; in quâ scribendo

do $S - T$ pro S' , & $S - T - T'$ pro S'' , emerget $rS + sS - sT + tS - tT - tT' = 0$, & exinde $S = \frac{s + tT + tT'}{r + s + t}$: adeoque datur S ex datis duobus Terminis. Sit Series summanda

$$1 + 3x + 8x^2 + 21x^3 + 55x^4 + 144x^5 + \&c.$$

in quâ relatio Terminorum est $xxT - 3xT' + T'' = 0$, hinc est $r = xx$, $s = -3x$, $t = 1$; quibus scriptis, habebitur $S = \frac{1 - 3xT + T'}{1 - 3x + xx}$. Substituere jam primum Terminum pro T , & secundum pro T' , & prodibit $\frac{1}{1 - 3x + xx}$ pro valore Seriei.

Similiter si Æquatio ad Terminos sit $rT + sT' + tT'' + vT''' = 0$, erit $S = \frac{s + tT + tT' + vT''}{r + s + t + v}$. Et sic deinceps quando relatio est inter plures Terminos.

SCHOLIUM.

Notandum relationem Terminorum quæ variabilis est, eo propius accedere ad invariabilem, quo magis Termini recedunt ab initio, & tandem in distantia infinita evadere omnino invariabilem ut in Seriebus ex Divisione ortis. Atque hanc appello *ultimam relationem* Terminorum ad quam relatio eorum continue approximat, nunquam tamen perveniet accurate priusquam Termini remoti fuerint infinito intervallo a principio.

Æquatio autem Differentialis definiens Seriem, rejiciendo dignitates Abscissæ omnes præter altissimam, & per hanc dividendo Æquationem residuam, dabit ultimam relationem Terminorum. Proponatur Æquatio $xxT \times \overline{zz + 3z} = T' \times \overline{zz - 5z + 2}$, rejice omnes dignitates Abscissæ infra quadratum, & manebit $xxTzz = T'zz$, quæ divisa per zz , dabit $xxT = T'$. Et hæc est relatio ultima Terminorum.

Ultima autem relatio, quum constans sit, suppeditat methodum summandi Series quamproxime, in quibus relatio Terminorum est variabilis. Si detur Æquatio quævis $rT \times \overline{zz + az + b} + sT' \times \overline{zz + cz + d} = 0$, ultima relatio Terminorum erit $rT + sT' = 0$, unde $S = \frac{s}{r + s} T$ quamproxime. Hæc Æquatio obtinet accurate quando Terminus T infinite distat ab initio, & proxime quando distantia est notabiliter magna. Similiter si Æquatio sit $rT \times \overline{z + a} + sT' \times \overline{z + b} + tT'' \times \overline{z + c}$,
ultima

ultima relatio erit $rT + sT' + tT'' = 0$, & $S = \frac{sT + tT'}{r + s + t}$ proxime.

Adeoque colligendo aliquot Terminos initiales, priusquam inchoatur computus, Summa reliquorum habebitur proxime per hanc methodum. Ex iisdem principiis etiam corrigere licet approximationem continue ut in Propositione sequente.

PROPOSITIO XIV.

Omnis Series $A + B + C + D + E + \text{\&c.}$ in quâ ultima relatio Terminorum est $rT + sT' + tT'' = 0$, assumendo $n = r + s + t$, & ponendo

$$\begin{aligned} A_2 &= rA + sB + tC, & A_3 &= rA_2 + sB_2 + tC_2, & A_4 &= rA_3 + sB_3 + tC_3, \\ B_2 &= rB + sC + tD, & B_3 &= rB_2 + sC_2 + tD_2, & B_4 &= rB_3 + sC_3 + tD_3, \\ C_2 &= rC + sD + tE, & C_3 &= rC_2 + sD_2 + tE_2, & C_4 &= rC_3 + sD_3 + tE_3, \text{\&c.} \\ D_2 &= rD + sE + tF, & D_3 &= rD_2 + sE_2 + tF_2, & D_4 &= rD_3 + sE_3 + tF_3, \\ E_2 &= rE + sF + tG, & E_3 &= rE_2 + sF_2 + tG_2, & E_4 &= rE_3 + sF_3 + tG_3, \\ &\text{\&c.} & &\text{\&c.} & &\text{\&c.} \end{aligned}$$

bipartitur in sequentes

$$sT \text{ in } \frac{A}{n} + \frac{A^2}{n^2} + \frac{A^3}{n^3} + \frac{A^4}{n^4} + \frac{A^5}{n^5} + \text{\&c.}$$

$$+ t \text{ in } \frac{B}{n} + \frac{B^2}{n^2} + \frac{B^3}{n^3} + \frac{B^4}{n^4} + \frac{B^5}{n^5} + \text{\&c.}$$

Per hanc itaque Propositionem, Series in quâ ultima relatio Terminorum definitur Equatione involvente tres Terminos, transmutabitur in duas hic exhibitas: quarum tamen prior evanescit ubi est $s + t = 0$. Si relatio sit inter duos tantum Terminos $rT + sT' = 0$, erit $t = 0$; eaque de causa, evanescet Series posterior, & ea quæ transmutanda proponitur, migrabit in unicam; quo in casu particulari coincidet hæc Propositio cum Theoremate a D. Monmort invento. Si relatio sit inter plures Terminos quam in hac Propositione, Series transmutanda migrabit in plures Series. At in omni casu res erit manifesta ex eo jam exhibitio. Et nolim amittere simplicitatem, affectando nimium paucis complecti.

EXEMPLUM

EXEMPLUM I.

Proponatur Series $1 + 4x + 9x^2 + 16x^3 + 25x^4 + 36x^5 + \&c.$ Ubi coefficients sunt quadrata numerorum naturalium: Æquatio differentialis est $xT \times \overline{zz+2z+1} - T'zz = 0$, & exinde ultima relatio $xT - T' = 0$, adeoque $r=x$, $s=-1$, $t=0$, $n=x-1$; atque

$A=1,$	$A_2=-3x,$	$A_3=2x^2,$	$A_4=0,$
$B=4x,$	$B_2=-5x^2,$	$B_3=2x^2,$	$B_4=0,$
$C=9x^2,$	$C_2=-7x^3,$	$C_3=2x^2,$	$\&c.$
$D=16x^3,$	$D_2=-9x^4,$	$\&c.$	
$E=25x^4,$	$\&c.$		

Omnes igitur Termini post A_3 , evanescunt; & substituendo hosce valores, Series transmutata fit

$$-1 \text{ in } \frac{1}{x-1} - \frac{3}{x-1^2} + \frac{2xx}{x-1^3}.$$

Et hi tres Termini in unum collecti dant $\frac{1+x}{1-x^3}$ pro valore Seriei. Quod si mutetur signum ipsius x tam in Serie, quam in ejus valore, habebitur

$$\frac{1-x}{1+x^3} = 1 - 4x + 9x^2 - 16x^3 + 25x^4 - 36x^5 + \&c.$$

Et inde etiam

$$\frac{1+6x^2+x^4}{1-xx^3} = 1 + 9x^2 + 25x^4 + 49x^6 + 81x^8 + \&c.$$

id quod colligi potest directe ex Propositione absque hisce ambagibus.

EXEMPLUM II.

Proponatur Series $1 + 8x + 27x^2 + 64x^3 + 125x^4 + 216x^5 + \&c.$ ubi Coefficientes sunt cubi numerorum naturalium: & Æquatio ad Seriem est $xT \times \overline{z^3+3z^2+3z+1} - T'z^3 = 0$; adeoque ultima relatio $xT - T' = 0$; & inde $r=x$, $s=-1$, $t=0$, $n=x-1$; &

U

A=1,

$$\begin{array}{lllll}
 A=1, & A_2=-7x, & A_3=12x^2, & A_4=-6x^3, & A_5=0, \\
 B=8x, & B_2=-19x^2, & B_3=18x^3, & B_4=-6x^4, & B_5=0, \\
 C=27x^2, & C_2=-37x^3, & C_3=24x^4, & C_4=-6x^5, & \&c. \\
 D=64x^3, & D_2=-61x^4, & D_3=30x^5, & \&c. & \\
 E=125x^4, & E_2=-91x^5, & \&c. & & \\
 F=216x^5, & \&c. & & & \\
 & \&c. & & &
 \end{array}$$

Hic evanescent Termini post A_4 ; & valores substituti in Theoremate, dant

$$-1 \text{ in } \frac{1}{x-1} - \frac{7x}{x-1^2} + \frac{12x^2}{x-1^3} - \frac{6x^3}{x-1^4},$$

& hi quatuor Termini collecti in unum dant $\frac{1+4x+x^2}{1-x^4}$ pro valore Seriei.

EXEMPLUM III.

Detur Series summanda $1-6x+27x^2-104x^3+366x^4-1212x^5+3842x^6-11784x^7+\&c.$ quæ definitur Æquatione $xxTz+4-2xT'z+2-T''z=0$, evadat jam z infinite magna, & ultima relatio erit $xxT-2xT'-T''=0$: hinc fit $r=xx$, $s=-2x$, $t=-1$, $n=xx-2x-1$; atque

$$\begin{array}{llll}
 A=+1, & A_2=-14x^2, & A_3=+29x^4, & A_4=0, \\
 B=-6x, & B_2=+44x^3, & B_3=-70x^5, & B_4=0, \\
 C=+27x^2, & C_2=-131x^4, & C_3=+169x^6, & \&c. \\
 D=-104x^3, & D_2=+376x^5, & D_3=-408x^7, & \\
 E=+366x^4, & E_2=-1052x^6, & \&c. & \\
 F=-1212x^5, & F_2=+2888x^7, & & \\
 G=+3842x^6, & \&c. & & \\
 H=-11784x^7, & & & \\
 & \&c. & &
 \end{array}$$

Substitue jam hosce valores pro A, A_2, A_3, B, B_2, B_3 , atque Series proposita transmigrabit in sequentes duas numero Terminorum finitas,

$$\begin{array}{l}
 -\frac{1}{2x+1} \text{ in } \frac{1}{xx-2x-1} - \frac{14x^2}{xx-2x-1^2} + \frac{29x^4}{xx-2x-1^3}, \\
 \frac{-6x}{xx-2x-1} + \frac{44x^3}{xx-2x-1^2} - \frac{70x^5}{xx-2x-1^3},
 \end{array}$$

Quæ duæ in unam Summam collectæ dant $\frac{1}{1+2x-xx}$, pro valore

Seriei. Ad eundem modum Theorema applicatur ad Transmutationem Serierum quæ summari nequeunt. Demonstratio autem ex sequentibus fiet

fiet manifesta. Sit Fractio quæcunque $\frac{a+bx+cx^2+dx^3}{v+ix+ix^2+ix^3}^n$, cujus Nume-

rator sit quantitas constans ex membris quotcunque, quorum tamen numerus est determinatus. Sit vero ejus Denominator dignitas quælibet quantitatis, quæ etiam conflatur ex membris quotvis Numero finitis. Tum quicunque sit index n , si Fractio resolvatur in Seriem, eadem semper erit ultima relatio Terminorum, ac si Denominator fuisset simplex potestas $v+ix+ix^2+ix^3$. In hanc igitur si Series continue multiplicetur, factum tandem abrumpet, si sit n integer & affirmativus: hoc est, si Series summabilis sit per simplicem Æquationem.

Proponatur Series $1-5x+27x^2-104x^3+366x^4-\&c.$ in quâ ultima relatio Coefficientium est $A-2B-C=0$; sumo quantitatem $xx-2x-1$, vel mutatis signis, $1+2x-xx$, in qua Coefficientes iidem sunt ac in ultima relatione, & concludo Seriem propositam, modo summabilis sit, æqualem esse alicui Fractioni cujus Denominator est Dignitas quædam quantitatis $1+2x-xx$. Ergo pono $S=1-6x+27x^2-104x^3+366x^4-\&c.$ & duco utramque partem in $1+2x-xx$; atque prodit $S \times 1+2x-xx = 1-4x+14x^2-44x^3+131x^4-\&c.$ quam quoniam nondum abrumpit, iterum duco in eandem quantitatem, & habeo $S \times 1+2x-xx^2 = 1-2x+5x^2-12x^3+29x^4-\&c.$ dein tertia vice multiplicans eandem, obtineo $S \times 1+2x-xx^3 = 1$; Terminis omnibus post primum evanescentibus.

Igitur palam est hanc Propositionem nihil aliud præstare quam methodum compendiosam multiplicationis, & simul dispositionem Terminorum in Seriebus transmutatis quæ efficit celerem convergentiam quando non abrumpunt. Quare Demonstrationem Lectori indagandam relinquo, quæ quidem eadem fere est sive Denominatores sint trinomiales, quadrinomiales aut plurium nominum.

PROPOSITIO XV.

Invenire Æquationem sive Algebraica sive Fluxionalis sit, cujus Radix erit Series quæcunque data quæ definitur Æquatione in qua Termini Seriei sunt unius tantum dimensionis.

Series datur ex datis aliquot Terminis initialibus & simul lege formandi reliquos: ex hisce autem datis invenietur Æquatio habens Seriem illam pro Radice, id quod per Exempla sequentia intelligetur.

EXEMPLUM

EXEMPLUM I.

Invenire Æquationem cujus Radix est Series $A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\&c.$ in quâ relatio Coefficientium est constans, scilicet $rA+tB+sC+vD=0$. Quoniam relatio est invariabilis, concludo Seriem æquari Fractioni rationali, quam sic eruo. Fingo y æqualem Serie datæ: & fumendo indices relationis r, s, t, v , in ordine inverso, duco y ejusque valorem successive in v, tx, sx^2, rx^3 , atque provenient

$$\begin{aligned}vy &= vA + vBx + vCx^2 + vDx^3 + vEx^4 + vFx^5 + \&c. \\txy &= tAx + tBx^2 + tCx^3 + tDx^4 + tEx^5 + \&c. \\sxx^2y &= sAx^2 + sBx^3 + sCx^4 + sDx^5 + \&c. \\rxx^3y &= rAx^3 + rBx^4 + rCx^5 + \&c.\end{aligned}$$

Sed ex suppositione, est $rA+tB+sC+vD=0$, $rB+sC+tD+vE=0$, & sic in infinitum. Unde evanescunt omnes Termini in quibus x est plurium quam duarum dimensionum; adeoque restabit

$$vy + txy + sx^2y + rxx^3y = vA \left\{ \begin{matrix} + vB \\ + tA \end{matrix} \right\} x + \left\{ \begin{matrix} + vC \\ + tB \\ + rA \end{matrix} \right\} x^2.$$

Quæ est Æquatio determinans valorem Seriei. Exempli causa, sit $A=2, B=-3, C=7, r=3, s=-7, t=6, v=4$; & evadet Æquatio

$$4y + 6xy - 7x^2y + 3x^3y = 8x - 4x^2, \text{ vel } y = \frac{8x - 4x^2}{4 + 6x - 7x^2 + 3x^3}.$$

EXEMPLUM II.

Invenire Æquationem quæ pro Radice habeat Seriem $1 - \frac{2}{3}x +$

$$\frac{8}{15}x^4 - \frac{16}{35}x^6 + \frac{128}{315}x^8 - \frac{256}{693}x^{10} + \&c. \text{ in qua relationes Coefficientium sunt } 2A + 3B = 0, 4B + 5C = 0, 6C + 7D = 0, 8D + 9E = 0, \&c.$$

In hoc Exemplo Æquatio quæ sita involvet Fluxiones primas, quoniam numeri in relationibus sunt æqui differentes. Assume ergo

$$y = A + Bx^2 + Cx^4 + Dx^6 + Ex^8 + \&c.$$

$$\text{erit } xy = 2Bx^2 + 4Cx^4 + 6Dx^6 + 8Ex^8 + \&c.$$

$$y + xy = A + 3Bx^2 + 5Cx^4 + 7Dx^6 + 9Ex^8 + \&c.$$

$$2x^2y + x^3y = 2Ax^2 + 4Bx^4 + 6Cx^6 + 8Dx^8 + \&c.$$

Adjiciatur nunc ultima Æquatio penultimæ atque prodibit

$y +$

$$y + xy + 2x^2y + x^3y = A \left\{ \begin{matrix} +2A \\ +3B \end{matrix} \right\} x^2 + B \left\{ \begin{matrix} +4B \\ +5C \end{matrix} \right\} x^3 + C \left\{ \begin{matrix} +6C \\ +7D \end{matrix} \right\} x^4 + D \left\{ \begin{matrix} +8D \\ +9E \end{matrix} \right\} x^5 + \&c.$$

Sed ex hypothesi relationes Coefficientium sunt $2A + 3B = 0$, $4B + 5C = 0$, $6C + 7D = 0$, &c. ideoque Termini omnes post primum A evanescunt, & restat Æquatio finita $y + xy + 2x^2y + x^3y = A = 1$, five $y \times \frac{1}{1+2x} + xy \times \frac{1}{1+x} = 1$: substituta scilicet unitate, five primo Termino Seriei pro Coefficiente A.

EXEMPLUM III.

Invenienda sit Æquatio cujus Radix est Series $1 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{64}x^4 - \frac{5}{256}x^6 - \frac{175}{2048}x^8 - \&c.$ ubi relationes Coefficientium sunt

$$-1.1A - 2.2B = 0, 1.3B - 4.4C = 0, 3.5C - 6.6D = 0, 5.7D - 8.8E = 0, \&c.$$

$$\text{Vel } -A - 4B = 0, 3B - 16C = 0, 15C - 36D = 0, 35D - 64E = 0, \&c.$$

In hoc casu Æquatio desiderata necessario involvet Fluxiones secundas, quoniam numeri qui indicant relationem Coefficientium, sunt duarum dimensionum, five facta sub numeris æquidifferentibus binatim sumptis. Sit itaque

$$y = A + Bx^2 + Cx^4 + Dx^6 + Ex^8 + \&c.$$

$$\dot{y} = 2Bx + 4Cx^3 + 6Dx^5 + 8Ex^7 + \&c.$$

$$x\dot{y} = 2Bx^2 + 12Cx^4 + 30Dx^6 + 56Ex^8 + \&c.$$

$$\ddot{y} + xy = 4Bx + 16Cx^3 + 36Dx^5 + 64Ex^7 + \&c.$$

$$x^3\ddot{y} + x^2\dot{y} - x\dot{y} = -Ax + 3Bx^3 + 15Cx^5 + 35Dx^7 + \&c.$$

Denique subducendo hanc ultimam Æquationem de penultima, manebit

$$x\dot{y} - x^3\ddot{y} + y - x^2\dot{y} + x\dot{y} = \left\{ \begin{matrix} +A \\ +4B \end{matrix} \right\} x + \left\{ \begin{matrix} -3B \\ +16C \end{matrix} \right\} x^3 + \left\{ \begin{matrix} -15C \\ +36D \end{matrix} \right\} x^5 + \left\{ \begin{matrix} -35D \\ +64E \end{matrix} \right\} x^7 + \&c.$$

hoc est $x\dot{y} - x^3\ddot{y} + y - x^2\dot{y} + x\dot{y} = 0$, vel $y + xy + \frac{x\dot{y}}{1-x} = 0$. Nam propter relationem Coefficientium, omnia membra ex una parte Æquationis evanescunt.

EXEMPLUM IV.

Quæraturs Æquatio, cujus Radix est $1 + \frac{1}{4}Ax^2 + \frac{9}{16}Bx^4 + \frac{25}{36}Cx^6 +$

X

$+ \frac{49}{64}$

$+ \frac{49}{64} D x^8 + \&c.$ ubi relationes Coefficientium. sunt $A - 4B = 0$, $9B - 16C = 0$, $25C - 36D = 0$, $\&c.$ Finge.

$$y = A + Bx^2 + Cx^4 + Dx^6 + Ex^8 + Fx^{10} + \&c.$$

$$\text{Erit } \dot{y} = 2Bx + 4Cx^3 + 6Dx^5 + 8Ex^7 + 10Fx^9 + \&c.$$

$$\text{ac } x\ddot{y} = 2Bx + 12Cx^3 + 30Dx^5 + 56Ex^7 + 90Fx^9 + \&c.$$

Dein per computum invenies

$$xy + 3x^2\dot{y} + x^3\ddot{y} = Ax + 9Bx^3 + 25Cx^5 + 49Dx^7 + 81Ex^9 + \&c.$$

$$\dot{y} + xy = 4Bx + 16Cx^3 + 36Dx^5 + 64Ex^7 + 100Fx^9 + \&c.$$

Harum Aequationum posteriorem subducito de priore & habebis

$$xy - \dot{y}x + 3xx - x\ddot{y}x + \ddot{y}x - x\ddot{y}x = \left\{ \begin{matrix} +A \\ -4B \end{matrix} \right\} x + \left\{ \begin{matrix} 9B \\ -16C \end{matrix} \right\} x^3 + \left\{ \begin{matrix} 25C \\ -36D \end{matrix} \right\} x^5 + \left\{ \begin{matrix} 49D \\ -64E \end{matrix} \right\} x^7 + \&c.$$

Et inde propter relationem Coefficientium, Aequatio erit $xy = \dot{y}x - 3xx + x\ddot{y}x - \ddot{y}x$.

EXEMPLUM V.

Queratur Aequatio cujus Radix est $x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{16}x^4 + \&c.$

ubi Denominatores sunt quadrata numerorum 1, 2, 3, $\&c.$ Assume

$$y = x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{25}x^5 + \&c.$$

$$\text{Erit } x\dot{y} = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 + \&c.$$

Cujus Fluxio est

$$x\ddot{y} + \dot{y} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \&c.$$

$$\text{hoc est } x\ddot{y} + \dot{y} = \frac{1}{1-x}.$$

Similiter si Series sit $x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{27}x^3 + \frac{1}{64}x^4 + \&c.$ ubi Denominatores sunt Cubi, invenies. Aequationem esse $\dot{y} + 3x\ddot{y} + x^2\ddot{y} = \frac{1}{1-x}.$

Et si Series sit $x + \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{81}x^3 + \frac{1}{256}x^4 + \&c.$ existentibus Denominatoribus

toribus biquadratis, prodibit Æquatio $\dot{y} + 6x\ddot{y} + 7x^2\ddot{\dot{y}} + x^3\ddot{\ddot{y}} = \frac{1}{1-x^4}$.

Et sic deinceps.

SCHOLION.

Ex data igitur relatione Coefficientium, Series reducuntur vel ad Fractiones vel ad Fluxiones, idque eâdem prorsus facilitate in omnibus casibus; siue Series determinetur per relationem plurium vel pauciorum Terminorum. Nam quoniam sumendo Fluxionem Seriei, Termini ducuntur in indices dignitatum, qui semper sunt æquidifferentes; & rursus in alias quantitates æquidifferentes, sumendo Fluxiones secundas; & sic porro, formare licet hac ratione relationes Terminorum quæcunque sint, insisterendo vestigiis mox traditis.

Ad summationem autem perfectam oportet Fluxiones reduci ad Fluents; quod ubi fieri nequit, concludendum est, Seriem de qua agitur non esse ex ipsarum numero quæ summari possunt. Multum autem confert ad promovendam hanc doctrinam ut Summationes reducantur ad Fluxiones, quoniam methodus regrediendi a fluxionibus ad Fluents, licet imperfecta sit, est tamen melius nota & magis exulta quam ea regrediendi a Differentiis ad Summas. Sed & altera alteri mutuo præbebit opem: Fluents enim si inveniri possint, exhibebunt Summas; vel e contra Summæ inventæ dabunt Fluents.

Ex Propositionibus jam traditis, aliisque ex iisdem principiis facile deducendis, invenire licet Radicem Æquationis cujuscunque accuratissime in numeris modo reduci possit in Seriem simplicem, etiamsi lentissime convergentem. Sed etiamnum restat difficultas, si neque Series cito approximet neque sit relatio Terminorum simplex & idonea quæ definiatur Æquatione differentiali. Quippe si in Æquatione resolvenda reperiatur Radix ejusve Fluxiones plurium quam unius dimensionis, vel si hæ in se mutuo multiplicentur; & hujusmodi membra nequeant eliminari: in iis inquam casibus Radix non est reducibilis in Seriem simplicem compositam ex dignitatibus Abscissæ, saltem per artes mihi hactenus notas. At dignitates Abscissæ utcunque altæ sint in Æquatione resolvendâ, nullatenus obstant simplicitati Seriei.

Sed hac oblata occasione, conabor tollere difficultatem hactenus intactam, quæ tamen in reductione Æquationum Fluxionalium maxima est. Sciendum igitur est eas Æquationes Fluxionales quæ involvunt omnes conditiones Problematis, ideoque determinant omnes Coefficientes in suis Radicibus, resolvi posse perinde ac Æquationes literales affectæ, idque per regulas a Newtono dudum traditas. Attamen plerumque fit Æquationes non determinare omnes Coefficientes Terminorum.

rum.

rum in suis Radicibus; scilicet quoniam quantitates constantes evanescunt & omnino amittuntur ex Æquatione in progressu a Fluentibus ad Fluxiones. Sed & variis modis evanescere solent prout Fluxio sumitur, id quod Exemplo declarare libet.

Proponatur Æquatio $y^2 = a^2 + bx + \frac{x^4}{c^2}$; & fluente x uniformiter, atque scripta unitate pro ejus Fluxione; habebitur per Methodum directam $2y\dot{y} = b + \frac{4x^3}{c^2}$: cujus Radix per methodos *Newtoni* extracta, eadem erit ac Radix Fluentis $y^2 = bx + \frac{x^4}{c^2}$, idque propter quantitatem aa jam amissam. Et hoc in casu non determinatur primus Terminus Seriei, qui utique pendet ex evanescente quantitate aa .

Similiter si Æquatio proposita prius dividatur per x , exibit $\frac{y^2}{x} = \frac{aa}{x} + b + \frac{x^3}{c^2}$, cujus Fluxio est $\frac{2y\dot{y}}{x} - \frac{y^2}{x^2} = -\frac{aa}{x^2} + \frac{3x^2}{cc}$, vel ducendo in x^2 , $2xy\dot{y} - y^2 = -aa + \frac{3x^4}{cc}$. Et hujus Radix pure sumpta eadem est ac Fluentis, $y^2 = a^2 + \frac{x^4}{c^2}$. Quo in casu non determinatur secundus Terminus Seriei, qui dependet ex Coefficiente b nunc amissa.

Denique si Æquatio fluens dividatur per x^4 , habebitur $\frac{y^2}{x^4} = \frac{aa}{x^4} + \frac{b}{x^3} + \frac{1}{cc}$, & exinde Fluxio erit $\frac{2y\dot{y}}{x^4} - \frac{4y^2}{x^5} = -\frac{4aa}{x^5} - \frac{3b}{x^4}$, vel $2xy\dot{y} - 4y^2 = -4aa - 3bx$; quæ resoluta per regulas vulgares, eandem dabit Radicem atque Fluens $y^2 = a^2 + bx$: adeoque Terminus Seriei quintus, qui dependet ex Coefficiente cc non determinatur. Hinc patet fluxionales Æquationes

$$2y\dot{y} = b + \frac{4x^3}{c^2},$$

$$2xy\dot{y} - y^2 = -aa + \frac{3x^4}{cc},$$

$$2xy\dot{y} - 4y^2 = -4aa - 3bx$$

provenire ab unicâ fluente $y^2 = aa + bx + \frac{x^4}{cc}$: per primam Terminus primus Seriei non determinatur; per secundam determinatur primus at
non

non secundus Terminus; per tertiam denique determinantur primi quatuor Termini Seriei, at quintus relinquitur indeterminatus. Possunt igitur diversæ Æquationes fluxionales provenire ex eadem fluente. Sed methodus resolutionis non erit perfecta priusquam in potestate fuerit exhibere omnes Radices diversarum fluentium a quibus Fluxio quævis proposita ullo modo pervenire possit. Nam necesse est habere rationem quantitatum quæ vel actu evanescere vel evanescere potuerunt.

Etenim non licet extrahere Radicem ex Æquatione fluxionali tanquam nulla quantitas evanuisse, dein addere quantitatem datam fluenti inventæ ut in Quadratura Curvarum. Termini utique indeterminati sæpiissime sunt quantitates invariabiles: & additio Quantitatis datæ Radici inventæ non æquipollet additioni Quantitatis Æquationi re-

solvendæ. Sic eadem Fluxio $2yy = b + \frac{4x^3}{cc}$ provenire potest ab utrâ-

vis fluentium $yy = aa + bx + \frac{x^4}{cc}$, vel $yy = bx + \frac{x^4}{cc}$; quarum tamen

Radices sortiuntur formas omnino diversas, scilicet prior $A + Bx +$

$Cx^2 + \&c.$ posterior $Ax^{\frac{1}{2}} + Bx^{\frac{3}{2}} + Cx^{\frac{5}{2}} + \&c.$

Insuper fieri potest Æquationem fluxionalem involvere omnes Coefficientes quas involvit fluens, & hoc non obstante, Terminos omnes non

determinari, ut in Exemplo sequente. Æquatio $y^2 = aa + bx + \frac{x^4}{cc}$

exhibet directæ Fluxionem $2yy = b + \frac{4x^3}{cc}$: quæ si ducatur in y , eva-

det $2y^2y = by + \frac{4x^3y}{cc}$; & dein substituatur pro yy suus valor $aa +$

$bx + \frac{x^4}{cc}$, tandem habebitur $2aay + 2bxy + \frac{2x^4y}{cc} = by + \frac{4x^3y}{cc}$. Et

hæc est Æquatio fluxionalis involvens omnes Coefficientes quas involvit ejus fluens; in qua nihilominus primus Terminus Seriei non determinatur. Idem etiam ubique eveniet nisi adsit membrum in Æquatione quod nec involvit Radicem neque ejus Fluxionem quamlibet.

Sunt & aliæ difficultates quamplurimæ haud minoris momenti, quas facile quivis percipiet multiplicari in Fluxionibus inferiorum ordinum: nam in Fluxionibus secundis, Termini duo ab invicem neutiquam pendentes possunt esse indeterminati, & tres in tertiis; & sic porro. Cæterum accidit haud raro omnes Terminos determinari ex Æquatione etiam involvente Fluxiones inferiorum Ordinum. Et omnia quæ hic dicta sunt de Fluxione cujus fluens nota est, etiam vera sunt de Fluxionibus quarum fluentes sunt ignotæ.

Radix Æquationis cujuscunque est quantitas, quæ scripta pro literâ denotante Radicem, efficiet omnes Terminos Æquationis resultantis evanescere. Termini autem duobus tantum modis possunt evanescere, vel per signorum contrarietatem in membris homologis, vel etiam ubi reperitur quantitas constans in fluente; eadem enim nullum relinquit vestigium in Fluxione. Ut si sit $y = Ax^n$; erit $\dot{y} = nAx^{n-1}$, $\ddot{y} = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} Ax^{n-2}$; si sit $n=0$, evanescet valor Fluxionis primæ; si sit $m-n=0$, id est, $n=0$, vel $n=1$, evanescet valor secundæ; idque absque aliis membris homologis quæ eas destruere possint. Et hæc sunt principia per quæ enodandæ sunt difficultates universæ quæ occurrunt in resolutione Æquationum fluxionalium.

Proponatur Æquatio resolvenda $r^2 \dot{y}^2 = r^2 x^2 - \dot{x}^2 y^2$, vel posita unitate pro x , $r^2 \dot{y}^2 = r^2 - y^2$. Per parallelogrammum vel alias *Newtoni* methodos, invenies Radicem

$$y = x - \frac{x^3}{6r^2} + \frac{x^5}{120r^4} - \frac{x^7}{5040r^6} + \&c.$$

Hujus enim quadratum scriptum pro y^2 , & Fluxionis quadratum pro $\dot{y}^2$ efficiet omnia membra Æquationis resultantis sese destruere per contrarietatem signorum. Videamus autem an alia sit radix quæ hoc modo inveniri nequeat. Illum in finem finge Ax^n esse primum Terminum Seriei, sive $y = Ax^n$ proxime; eritque $\dot{y} = nAx^{n-1}$; adeoque $\dot{y}^2 = n^2 A^2 x^{2n-2}$, & $y^2 = A^2 x^{2n}$; quibus scriptis, resultat $n^2 r^2 A^2 x^{2n-2} = r^2 - A^2 x^{2n}$, vel ducendo totam in x^2 .

$$n^2 r^2 A^2 x^{2n} = r^2 x^2 - A^2 x^{2n+2}.$$

Ubi patet membrum $n^2 r^2 A^2 x^{2n}$ evanescere quando est $n=0$: substituitur ergo 0 pro n , & evadet Æquatio

$$0 \times r^2 A^2 x^0 = r^2 x^2 - A^2 x^2$$

hoc igitur in casu evanescit membrum $r^2 A^2 x^0$ in quo x est minimarum dimensionum: eâque de causâ erit Ax^0 , sive constans quantitas A primus Terminus Seriei eo citius convergentis quo minor est x . Atque hunc computum prosequendo invenies per methodos vulgares

$$y = Ax^1 - \frac{x^3}{2r^2} + \frac{x^5}{24r^4} - \frac{x^7}{720r^6} + \&c.$$

Sed quantitas A ex Æquatione Fluxionali non determinatur. Quod si Æquationis $r^2 \dot{y}^2 = r^2 - y^2$, capiatur Fluxio habebitur $2r^2 \dot{y} \ddot{y} = -2y \dot{y}$, vel dividendo & transponendo $r^2 \dot{y} + y = 0$. Ponamus jam esse $y = Ax^n$,
erit

erit $\dot{y} = nAx^{n-1}$, & $\ddot{y} = \overline{nn-n} Ax^{n-2}$, quibus substitutis, prodit $\overline{nn-n} \times r^2 Ax^{n-2} + Ax^n = 0$; ubi patet indicem $n-2$ non comparari posse cum indice n ; & proinde nullam Radicem illâ methodo erui posse. Attamen ponendo Coefficientem $nn-n=0$, habebitur $n=0$, & $n=1$; adeoque potest A vel Ax esse primus Terminus Seriei, uti prius invenimus.

Prior Series dat Sinum, & posterior Cosinum ex dato Arcu x . Estque Coefficientens A in posteriore æqualis Radio r . Etenim si ponas y pro Sinu vel Cosinu, semper incidet in Æquationem $r^2 \dot{y}^2 = r^2 - y^2$, quæ nullâ Radice explicabilis est præter duas jam exhibitas. Ex hoc autem Exemplo notare licet formam Seriei semper determinatam esse ex Æquatione, etiam si Coefficientes non determinentur. Et ubi Coefficientens cujusvis Termini non determinatur, index ipsius x in eodem semper invenietur ponendo membrum aliquod Æquationis resultantis æquale nihilo. Ubi vero Coefficientens Termini determinatur, index ipsius x in eodem invenitur per comparisonem duorum indicum in Æquatione resultante, idque per regulas *Newtoni*.

Resolvenda sit Æquatio $\ddot{y} + a^2 y - x \dot{y} - x^2 \ddot{y} = 0$, ubi x fuit uniformiter, & unitas scribitur pro ejus Fluxione. Finge $y = Ax^n$ proxime, eritque $\dot{y} = nAx^{n-1}$, $\ddot{y} = \overline{nn-n} Ax^{n-2}$: quibus substitutis in Æquatione resultat $\overline{nn-n} Ax^{n-2} + \overline{aa-nn} Ax^n = 0$. Pone jam Coefficientem $nn-n=0$, & prodibit $n=0$, vel $n=1$: hi valores substituti pro n in Æquatione, exhibent

$$0 \times Ax^{-2} + aa Ax^0 = 0, \text{ \& } \\ 0 \times Ax^{-1} + \overline{aa-1} Ax = 0;$$

quumque in utroque casu evanescat membrum in quo x est minimarum dimensionum, concludo esse 0 vel 1, indicem ipsius x in primo Terminio Seriei quæ convergit eo citius quo minor est x : adeoque usurpare licet

$$y = A + Bx^2 + Cx^4 + Dx^6 + \&c. \\ \text{vel } y = Ax + Bx^3 + Cx^5 + Dx^7 + \&c.$$

In Æquatione resultante $\overline{nn-n} Ax^{n-2} + \overline{aa-nn} Ax^n = 0$, pone nunc Coefficientem $aa-nn=0$; eritque $n = \pm a$: scribe igitur $+a$, & $-a$ pro n , & prodibit

$$\overline{aa-a} Ax^{a-2} + 0 \times Ax^a = 0 \\ \overline{aa+a} Ax^{-a-2} + 0 \times Ax^{-a} = 0.$$

In utroque igitur casu evanescit membrum in quo x est maximarum dimensionum; eaque propter eritque $+a$ vel $-a$ index primi Termini Seriei eo citius convergentis quo major est x . Nam assumere licet

$$y =$$

$$y = Ax^a + Bx^{a-2} + Cx^{a-4} + Dx^{a-6} + \&c.$$

$$\text{vel } y = Ax^{-a} + Bx^{-a-2} + Cx^{-a-4} + Dx^{-a-6} + \&c.$$

Harum quatuor Serierum coefficientes determinatæ dant valores Radicis sequentes

$$A + \frac{0-aa}{1.2} Ax^2 + \frac{4-aa}{3.4} Bx^2 + \frac{16-7a}{5.6} Cx^2 + \frac{36-2a}{7.8} Dx^2 + \&c.$$

$$Ax + \frac{1-aa}{2.3} Ax^2 + \frac{9-aa}{4.5} Bx^2 + \frac{25-7a}{6.7} Cx^2 + \frac{49-aa}{8.9} Dx^2 + \&c.$$

$$Ax^a - \frac{a-a-1}{4.a-1} \times \frac{A}{x^2} - \frac{a-2.a-3}{8.a-2} \times \frac{B}{x^2} - \frac{a-4.a-5}{12.a-3} \times \frac{C}{x^2} - \frac{a-6.a-7}{16.a-4} \times \frac{D}{x^2} - \&c.$$

$$\frac{A}{x^a} - \frac{a.a+1}{4.a+1} \times \frac{A}{x^2} - \frac{a+2.a+3}{8.a+2} \times \frac{B}{x^2} - \frac{a+4.a+5}{12.a+3} \times \frac{C}{x^2} - \frac{a+6.a+7}{16.a+4} \times \frac{D}{x^2} - \&c.$$

Duæ priores attinent ad multiplicationem aut divisionem Arcus circularis. Posteriores vero spectant ad aream Hyperbolæ. Et hæc Exempla sufficiant ad illustrandam regulam hic adductam pro determinando indice. Ea deducitur ex Propositione quintâ: atque per eandem & regulas *Newtoni*, extractio radicum in Seriebus infinitis ad umbilicum perducitur, uti quivis facile percipiet qui mediocriter versatus est in iis quæ hæc de re Authores hætenus protulere. Etenim facile demonstrabitur Æquationem non admittere Seriem pro Radice quæ hæc methodo non eruitur. Sed hic non loquor de Seriebus quæ constantur ex Terminis in quibus indeterminata x habet indices indeterminatos.





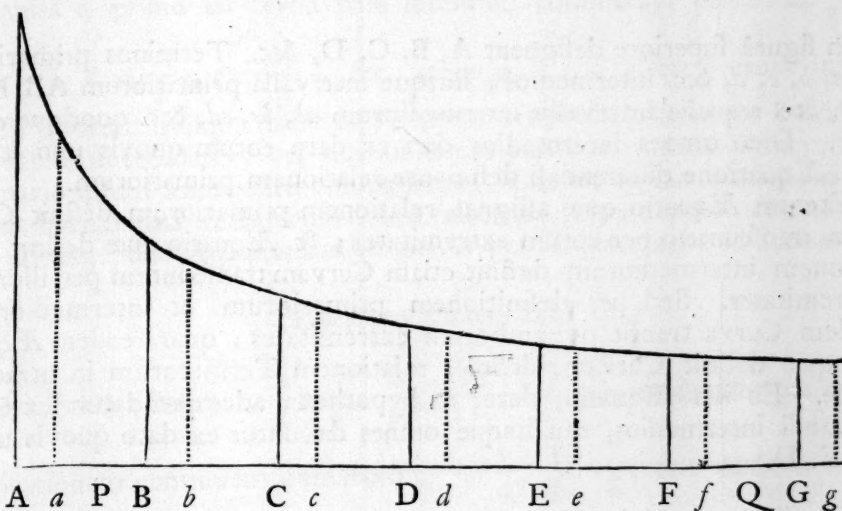
PARS SECUNDA.

D E

Interpolatione Serierum.



IT recta quævis positione data PQ, super quam erigantur Ordinatæ quotcunque A, B, C, D, &c. sibi mutuo parallelæ, & æqualibus intervallis ab invicem distantes: designent autem hæ Ordinatæ Terminos Seriei regularis, continue increscentes vel decrescentes, & eodem signo affectos; atque una eademque Curva transibit per extremitates omnium, quæ quidem determinabitur ex data



Æquatione ad Seriem, id est, ex datâ Æquatione generaliter exprimente relationem inter duas vel plures Ordinatas qualvis successivas.

Z

Si

Si ex data $\mathcal{A}$ equatione illa differentiali erui possit $\mathcal{A}$ equatio hujus Curvæ Algebraica, utpote quæ definit relationem inter Abscissas & Ordinatas correspondentes, habebitur Ordinata quæcunque ex data ejus Abscissâ per resolutionem $\mathcal{A}$ equationum affectarum, adeoque Interpolatio Seriei absoluta; quæ utique consistit in assignatione cujuslibet Terminii primarii vel intermedii ex dato ejus loco in Serie. Ubi vero $\mathcal{A}$ equatio Curvæ Algebraica nequit inveniri, id quod plerumque fit, nihil ulterius sperandum est quam exhibere valorem Terminii cujuslibet quæsit per Seriem convergentem, vel forte per Quadraturam Curvarum.

Hic autem loquor de Terminis æquidistantibus, quorum quippe relationes prodeunt scribendo numeros æquidistantes successive pro Abscissâ z in $\mathcal{A}$ equatione differentiali Seriem definiente. Nam intervallum commune Ordinarum super Abscissam consistentium, proportionale est incremento invariabili indeterminatæ z .

PROPOSITIO XVI.

Si idem sit intervallum commune Terminorum primariorum & intermediorum, & detur unus ex intermediis, dabuntur omnes ex data $\mathcal{A}$ equatione ad primarios.

In figurâ superiore designent A, B, C, D, &c. Terminos primarios, & a, b, c, d , &c. intermedios; sintque intervalla primariorum AB, BC, CD, &c. æqualia intervallis intermediorum ab, bc, cd , &c. quodque cuique. Dico omnes intermedios dari ex dato eorum quovis uno & simul $\mathcal{A}$ equatione differentiali definiente relationem primariorum.

Etenim $\mathcal{A}$ equatio quæ assignat relationem primariorum definit Curvam transeuntem per eorum extremitates; & $\mathcal{A}$ equatio quæ definit relationem intermediorum definit etiam Curvam transeuntem per illorum extremitates. Sed per definitionem primariorum & intermediorum eadem Curva transit per amborum extremitates; quare eadem $\mathcal{A}$ equatio quæ definit Curvam, definiet relationem Terminorum in utraque Serie. Et illa $\mathcal{A}$ equatio, datur ex hypothesi; adeoque datur lex continuandi intermedios, qui itaque omnes dabuntur ex dato quovis uno. Q. E. D.

Corollarium. Si in $\mathcal{A}$ equatione quâvis differentiali exprimente relationem primariorum A, B, C, D, &c. valores successivi Abscissæ z sint —PA, PB, PC, PD, &c. existente puncto quovis P principio Abscissæ: tum

tum habebuntur relationes intermediorum scribendo pro z successive $-Pa$, Pb , Pc , Pd , &c. in eadem $\text{\AA}equatione$. Nam $\text{\AA}equatio$ differentialis generaliter exprimit relationem inter duas quascunque Ordinatas ad certam distantiam ab invicem fitas, five eae cadant in Serie primariarum five in eâ intermediarum.

EXEMPLUM I.

In progressionem Terminorum Geometrica $1, x, x^2, x^3, x^4$, &c. si Termini in medio consistentes inter primarios sint a, b, c, d, e , &c. erit $b=ax$, $c=bx$, $d=cx$, $e=dx$, &c. quorum utique eadem est ratio ac primariorum.

EXEMPLUM II.

Si Termini primarii sint $1, 1, 2, 6, 24, 120, 720$, &c. quorum relationes sunt $B=A$, $C=2B$, $D=3C$, $E=4D$, &c. & Terminus directe in medio consistens inter duos primos 1 & 1 sit a ; reliqui dabuntur per $\text{\AA}equationes$ $b=\frac{3}{2}a$, $c=\frac{5}{2}b$, $d=\frac{7}{2}c$, $e=\frac{9}{2}d$, &c. hi utpote consistunt in medio inter duos quosque primarios, ab iisdem hinc inde æqualiter distantes.

Si vero a designet Terminum inter primum & secundum, cujus distantia a primo est tertia pars intervalli communis; pone $b=\frac{4}{3}a$, $c=\frac{7}{3}b$, $d=\frac{10}{3}c$, $e=\frac{13}{3}d$, &c. atque a, b, c, d, e , &c. erunt intermedii quorum quisque distat tertia parte intervalli communis a primario ipsum antecedente, vel duabus tertiis partibus ejusdem intervalli a primario ipsum immediate consequente. Constat igitur relationem intermediorum dari ex Interpolatione relationis primariorum: & ea semper est interpolabilis, quoniam assignatur per $\text{\AA}equationem$ ad Seriem.

EXEMPLUM III.

Proponatur Series $1, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{5}{16}, \frac{35}{128}$, &c. quæ producitur per multiplicationem continuam numerorum $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}$, &c. & sit a Terminus in medio inter primum & secundum, atque ponatur $b=\frac{2}{3}a$,
 $c=$

$c = \frac{4}{5}b, d = \frac{6}{7}c, e = \frac{8}{9}d, \&c.$ tum erunt $b, c, d, e, \&c.$ reliqui intermedii qui consistunt in medio inter duos quosque primarios.

SCHOLIUM.

Si Æquatio ad Seriem involvat tres Terminos, debent dari duo; & tres si involvat quatuor, & sic porro, ut habeantur reliqui intermedii. Hujus autem generis est Propositio *Newtoni* septima in Tractatu de quadratura Curvarum, quæ tamen non tantum obtinet in Curvis sed & in Serie quacunque. Atque usui venit hoc Theorema quotiescunque quæritur Terminus intermedius qui consistit prope initium Seriei: eo enim in casu ejus valor proveniet in Serie lentissime convergente; quare primo quærendus est respectivus intermedius satis remotus a principio, cujus utique valor prodibit in Serie cito approximante: dein ex hoc dato regrediendum est ad illum primo propositum per relationes Terminorum, ut in hac Propositione.

PROPOSITIO XVII.

Omnis Series est interpolabilis, cujus Termini constant ex factoribus interpolabilibus.

Sit $A \times a \times \alpha, B \times b \times \beta, C \times c \times \gamma, D \times d \times \delta, \&c.$ Series cujus Termini constantur ex tribus factoribus: dico eam esse interpolabilem, si interpolabiles sint tres factorum Series, scilicet $A, B, C, D, \&c. a, b, c, d, \&c. \& \alpha, \beta, \gamma, \delta, \&c.$

Quoniam enim Termini intermedii in Serie composita, eodem modo formantur ex intermediis correspondentibus in Seriebus simplicibus, ac primarii ex primariis; iidem invenientur ducendo respectivos intermedios Serierum simplicium in se mutuo. Ut si T sit Terminus inter B & C , t respectivus inter b & c , atque τ respectivus inter β & γ ; tum Terminus correspondens in Serie composita, scilicet is inter $B \times b \times \beta$ & $C \times c \times \gamma$, erit factum sub illis tribus, nempe $T \times t \times \tau$. Et si plures vel pauciores sint factores, similiter demonstrabitur Propositio. Q. E. D.

Corollarium. Hinc in Serie interpolandâ, si duæ vel plures Series factorum sint accurate interpolabiles, possunt rejici ex computo: dein reliquæ sunt interpolandæ per methodos postea tradendas. Nam interpolatio non est temere suscipienda; sed ante exordium operis inquirendum est quænam sit Series simplicissima ex cujus intercalatione pendet ea Seriei propositæ.

fitæ. Atque hæc præparatio est magna ex parte omnino necessaria, ut deveniamus ad conclusiones concinnas & elegantes.

EXEMPLUM I.

Si Series intercalanda sit $1, \frac{1}{6}x, \frac{3}{40}x^2, \frac{5}{112}x^3, \frac{35}{1152}x^4, \&c.$ primum resolvo eandem in tres Series factorum simplicium ad modum sequentem

$$x^0, x^1, x^2, x^3, x^4, \&c.$$

$$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \&c.$$

$$1, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{5}{16}, \frac{35}{128}, \&c.$$

& harum trium Serierum palam est duas primas esse interpolabiles, non item tertiam; quæ tamen quum sit simplicior, facilius interpolabitur quam ea quæ proponitur. Ut si desideretur is in medio inter secundum & tertium Seriei compositæ; patet correspondentes Terminos in prima & secunda Serierum simplicium esse $x^{\frac{3}{2}}$ & $\frac{1}{4}$ respective: in tertia Terminus correspondens appelletur T, dein factum sub hisce tribus $x^{\frac{3}{2}}, \frac{1}{4}, \& T$, sive $\frac{1}{4} T x \sqrt{x}$ erit is qui desideratur. Adeoque Interpolatio Seriei compositæ reducitur ad Interpolationem Seriei simplicioris.

EXEMPLUM II.

Si detur Series hujusmodi $1, \frac{r}{p} A, \frac{r+1}{p+1} B, \frac{r+2}{p+2} C, \frac{r+3}{p+3} D, \&c.$ interpolare licet Series Numeratorum & Denominatorum seorsim, hoc est, Series

$$1, r, r \cdot \overline{r+1}, r \cdot \overline{r+1} \cdot \overline{r+2}, \&c.$$

$$1, p, p \cdot \overline{p+1}, p \cdot \overline{p+1} \cdot \overline{p+2}, \&c.$$

Deinde Terminus quilibet in Serie Numeratorum divisus per respectivum in eâ Denominatorum, dabit correspondentem in Serie propositâ. Si differentia inter r & p sit numerus parvus, non opus est hujus artificii. Cæterum quando prædicta differentia est magna, necesse est interpolare Numeratores & Denominatores seorsim.

A a

SCHOLION.

SCHOLION.

Huc etiam referri debent plurimæ hujusmodi præparationes. Exempli gratiâ, si Seriei

&c. $e, d, c, b, a, A, B, C, D, E, \&c.$

hinc inde excurrentis in infinitum desideretur Terminus in medio inter duos medios primarios a & A . Duc Terminos primarios æqualiter a medio distantes in se mutuo; hoc est, A in a , B in b , &c. & componetur nova Series utrinque excurrentis in infinitum

&c. $Dd, Cc, Bb, Aa, Aa, Bb, Cc, Dd, \&c.$

cujus Termini a medio æqualiter hinc inde remoti sunt inter se æquales: & cujus Terminus in medio inter Aa & Aa erit quadratum Termini quæsitum qui consistit in medio inter a & A in Serie prius proposita. Igitur Terminus ille quæsitus erui possit per interpolationem alterutrius Seriei.

Notandum est Terminum desideratum consistere posse in diversis Seriebus, & ex eâ consideratione facilius nonnunquam inveniri. Ut si Terminus quilibet quæsitus lateat in medio inter primum & secundum in utrâvis Serierum sequentium

$1, r, r.r+1, r.r+1.r+2, \&c.$

$1, \frac{1}{p}, \frac{1}{p.p+1}, \frac{1}{p.p+1.p+2}, \&c.$

Tum ducendo Terminos respectivos in se mutuo producet nova Series

$1, \frac{r}{p}A, \frac{r+1}{p+1}B, \frac{r+2}{p+2}C, \frac{r+3}{p+3}D, \&c.$

inter cujus Terminum primum & secundum is qui medium locum tenet, æqualis est quadrato ejus primo propositi.

Nonnunquam etiam interpolatio prospere succedet per Logarithmos, præsertim si Terminorum permagnæ sint differentiæ. Sed hæc & similia addiscenda sunt experientiâ. Nam sicuti in Algebrâ vulgari tota ars Analytæ non consistit in resolutione Æquationum affectarum, sed in perducendo Problemata ad easdem; ita etiam in hac Analyfi, minus solertiæ requiritur ad resolutionem Æquationum differentialium aut interpolationem Serierum; in inveniendis enim Seriebus quæ determinant quantitates incognitas, quæque idoneæ sint interpolationi, consistit longe major difficultas.

PROPO-

PROPOSITIO XVIII.

Si Termini duarum Serierum formentur ducendo in se continue Fractiones quarum Numeratores & Denominatores increscant perpetuâ additione unitatis, & si iidem sint Numeratores in utrâque; Dico Terminum unius cujus distantia ab initio est differentia factorum in altera æqualem esse Terminum hujus cujus distantia ab initio est differentia factorum in illa Serie, modo primi Termini sibi invicem æquentur.

Sint duæ Series quarum primi Termini A & a sibi mutuo æquentur

$$B = \frac{r}{p} A, C = \frac{r+1}{p+1} B, D = \frac{r+2}{p+2} C, E = \frac{r+3}{p+3} D, \&c.$$

$$b = \frac{r}{q} a, c = \frac{r+1}{q+1} b, d = \frac{r+2}{q+2} c, e = \frac{r+3}{q+3} d, \&c.$$

& in quibus iidem sunt Numeratores, dico Terminum prioris cujus distantia ab initio æqualis est differentiæ factorum in posteriore, nempe $q-r$, æqualem esse Terminum posterioris, cujus distantia ab initio est $p-r$, scilicet differentiæ factorum in Serie prioris. Et notandum, ubi $p-r$ vel $q-r$ est quantitas negativa, Terminos de quibus agitur consistere ante primos hisce intervallis.

Assumamus Terminum quemlibet Seriei prioris, verbi gratiâ septimum, positâ $A=1$, scilicet

$$G = 1 \times \frac{r}{p} \times \frac{r+1}{p+1} \times \frac{r+2}{p+2} \times \frac{r+3}{p+3} \times \frac{r+4}{p+4} \times \frac{r+5}{p+5}, \&c.$$

Et primo si sit $p-r=0$, sive $p=r$; erit $p+1=r+1$, $p+2=r+2$, &c. adeoque omnes Numeratores & Denominatores sese mutuo destruant, & restat $G=1$.

Si sit $p-r=1$, erit $p=r+1$; & inde $p+1=r+2$, $p+2=r+3$, &c. quo in casu evanescunt omnes Numeratores præter primum, & Denominatores omnes præter ultimum; existente $G = 1 \times \frac{r}{p+5}$, vel

$$G = 1 \times \frac{r}{r+6} \text{ propter } p+5 \text{ æqualem } r+6.$$

Si

Si fit $p-r=2$, vel $p=r+2$; erit $p+1=r+3$, $p+2=r+4$, &c. & nunc evanescunt Numeratores omnes præter duos primos, & omnes

Denominatores præter duos ultimos, manente $G = 1 \times \frac{r}{p+4} \times \frac{r+1}{p+5}$,

vel $G = 1 \times \frac{r}{r+6} \times \frac{r+1}{r+7}$, propter $p+4=r+6$, & $p+5=r+7$.

Et similiter si fit $p-r=3$, vel $p=r+3$; evanescunt Numeratores omnes præter tres primos, & Denominatores omnes præter tres ultimos: & in illo casu erit $G = 1 \times \frac{r}{r+6} \times \frac{r+1}{r+7} \times \frac{r+2}{r+8}$. Atque universaliter in valore Termini G , tot semper erunt Numeratores totidemque Denominatores quot sunt unitates in $p-r$, ut in Tabulâ seguente

$$p-r=0, \quad G=1,$$

$$p-r=1, \quad G=1 \times \frac{r}{r+6},$$

$$p-r=2, \quad G=1 \times \frac{r}{r+6} \times \frac{r+1}{r+7},$$

$$p-r=3, \quad G=1 \times \frac{r}{r+6} \times \frac{r+1}{r+7} \times \frac{r+2}{r+8},$$

$$p-r=4, \quad G=1 \times \frac{r}{r+6} \times \frac{r+1}{r+7} \times \frac{r+2}{r+8} \times \frac{r+3}{r+9},$$

&c.

Adeoque si ponatur $q=r+6$, sive $q-r=6$; Terminus hujus Seriei 1, $\frac{r}{p} A$, $\frac{r+1}{p+1} B$, &c. cujus intervallum ab initio est $q-r$ sive 6,

æqualis est Termino hujus 1, $\frac{r}{q} a$, $\frac{r+1}{q+1} b$, &c. cujus intervallum ab initio est $p-r$. Et eodem modo manifesta erit Propositio in aliis casibus. Q. E. D.

Corollarium. Hinc si differentia factorum p & r non sit permagna, Terminus Seriei prioris utcumque longe remotus ab initio semper determinabitur per Terminum in Serie posteriore qui parum distat a principio. Ut Exemplis sequentibus patebit.

EXEMPLUM

EXEMPLUM I.

Sit $r=3$, $p=5$, $q=10$; & hisce valoribus substitutis, evadent duæ Series

$$1, \frac{3}{5}, \frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 6}, \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{5 \cdot 6 \cdot 7}, \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}, \&c.$$

$$1, \frac{3}{10}, \frac{3 \cdot 4}{10 \cdot 11}, \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{10 \cdot 11 \cdot 12}, \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13}, \&c.$$

Est vero $q-r=7$, $p-r=2$; adeoque Terminus in priore cujus intervallum ab initio est 7, æqualis erit Termino in posteriore, cujus intervallum ab initio est 2; sive quod idem est, octavus Terminus Seriei prioris $\frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11}$ æqualis est tertio posterioris $\frac{3 \cdot 4}{10 \cdot 11}$. Et notandum est ubi differentia inter p & r est numerus integer, tum Terminum quemvis Seriei prioris semper æquari primario alicui in posteriore.

EXEMPLUM II.

[Sit prior Series $1, \frac{2}{1} A, \frac{4}{3} B, \frac{6}{5} C, \frac{8}{7} D, \&c.$ & quoniam factorum incrementum est binarius, divide Numeratores & Denominatores per binarium; & prodibit Series $1, \frac{1}{\frac{1}{2}} A, \frac{2}{\frac{1}{2}+1} B, \frac{3}{\frac{1}{2}+2} C, \&c.$ ubi jam incrementum factorum est unitas; & per consequens hæc Series comparari possit cum illâ in Theoremate, prodeuntibus $r=1$, $p=\frac{1}{2}$: Sit etiam m intervallum inter primum Terminum Seriei & quemvis alium; & erit $m=q-r$, vel $m=q-1$, atque $q=m+\frac{1}{2}$; quo substituto evadet Series posterior

$$1, \frac{a}{m+\frac{1}{2}}, \frac{2b}{m+\frac{3}{2}}, \frac{3c}{m+\frac{5}{2}}, \frac{4d}{m+\frac{7}{2}}, \&c.$$

cujus Terminus ab initio remotus intervallo $p-r$, sive $-\frac{1}{2}$, æqualis erit Termino prioris cujus intervallum ab initio est quantitas quæcunque m . Hoc est, Terminus prioris utcunque longe remotus a principio, scilicet distantia utcunque magnâ m semper æquabitur Termino posterioris, qui consistit ante primum dimidio intervalli communis.

B b

Vel

Interpolatio Serierum.

Vel si sumatur Series $1, \frac{1}{2} A, \frac{3}{4} B, \frac{5}{6} C, \frac{7}{8} D, \&c.$ cujus Termini sunt reciproci ejus de quâ nunc egimus, erit $r = \frac{1}{2}$, $p = 1$; & si m fit intervallum inter Terminum primum & quemvis alium, erit $m = q - r$, vel $m = q - \frac{1}{2}$, ac $q = m + \frac{1}{2}$, & posterior Series evadet

$$1, \frac{a}{2m+1}, \frac{3b}{2m+3}, \frac{5c}{2m+5}, \frac{7d}{2m+7}, \&c.$$

In qua Terminus ab initio remotus distantia $p - r$, sive $\frac{1}{2}$; id est, Terminus in medio inter primum & secundum, æqualis erit Termino cuicunque prioris cujus distantia ab initio est quantitas quælibet m . Ut si desideretur Terminus Seriei millesimus primus, cujus utique intervallum ab initio est mille, erit $m = 1000$, & Terminus Seriei

$$1, \frac{a}{2001}, \frac{3b}{2003}, \frac{5c}{2005}, \frac{7d}{2007}, \&c.$$

qui consistit in medio inter primum 1 & secundum $\frac{1}{1999}$ æqualis erit millesimo primo Termino hujus $1, \frac{1}{2} A, \frac{3}{4} B, \frac{5}{6} C, \frac{7}{8} D, \&c.$ Cujus etiam Termini intermedii eodem modo inveniuntur; nam si pro m scribatur $999\frac{1}{2}$, proveniet Series

$$1, \frac{a}{2000}, \frac{3b}{2002}, \frac{5c}{2004}, \frac{7d}{2006}, \&c.$$

cujus Terminus in medio inter primum & secundum, æqualis est Termino hujus Seriei $1, \frac{1}{2} A, \frac{3}{4} B, \frac{5}{6} C, \frac{7}{8} D, \&c.$ qui consistit in medio inter millesimum & millesimum primum.

EXEMPLUM III.

Si quærat Terminus hujus Seriei $1, \frac{2}{1} A, \frac{5}{4} B, \frac{8}{7} C, \frac{11}{10} D, \&c.$ cujus intervallum a principio fit quantitas quælibet m : primo divide Numeratores & Denominatores per incrementum ipsorum commune 3, & evadet Series $1, \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} A, \frac{\frac{5}{3}}{\frac{4}{3}} B, \&c.$ adeoque erit $r = \frac{2}{3}$, $p = \frac{1}{3}$, $q =$

$r =$

$r = q - \frac{2}{3} = m$; & inde $q = m + \frac{2}{3}$: unde Series posterior evadet

$$1, \frac{2a}{3m+2}, \frac{5b}{3m+5}, \frac{8c}{3m+8}, \frac{11d}{3m+11}, \&c.$$

cujus Terminus ab initio distans intervallo $p - r$, five $-\frac{1}{3}$, id est,

Terminus qui consistit ante primum tertiâ parte intervalli communis, æqualis est Termino Seriei prioris, qui distat a principio, intervallo quantumvis magno m .

De Quantitatum Differentiis.

Sit a, b, c, d, e , Series quocunque quantitatum, & si priores auferantur de posterioribus, manebunt Differentiæ primæ $b - a, c - b, d - c, e - d$: dein si harum Differentiarum priores similiter auferantur de posterioribus, relinquentur Differentiæ secundæ $c - 2b + a, d - 2c + b, e - 2d + c$; quarum rursus Differentiæ constituunt Differentias tertiâs $d - 3c + 3b - a, e - 3d + 3c - b$, quantitatum a, b, c, d, e . Et sic porro proceditur usque dum perventum fuerit ad ultimam Differentiam ut in Tabulâ sequente.

	1mæ				
a					
$b - a$		2dæ			
$c - b$		$c - 2b + a$		3tiæ	
$d - c$		$d - 2c + b$		$d - 3c + 3b - a$	
$e - d$		$e - 2d + c$		$e - 3d + 3c - b$	
				4ta	
				$e - 4d + 6c - 4b + a$	

Sit $1 - x$ binomium in quo uncia $+1, -1$ eadem sint ac Coefficientes in Differentiis primis; tum uncia quadrati $1 - 2x + x^2$, scilicet $+1, -2, +1$ erunt Coefficientes in Differentiis secundis; item uncia Cubi $1 - 3x + 3x^2 - x^3$ erunt Coefficientes in Differentiis tertiis: & in genere Coefficientes in quolibet ordine Differentiarum erunt uncia in correspondehte dignitate binomii. Atque hisce præcognitis, pergere licet per saltum ad quemlibet ordinem Differentiarum absque consideratione intermediarum.

Duæ quantitates habent Differentiam primam, tres habent secundam, quatuor tertiâ; nec ultiores habere possunt. Sed nonnunquam accidit

cidit quendam ordinem Differentiarum constituere progressionem æqualium, quo in casu ultiores Differentiæ non habentur, utcunque magnus sit quantitatum numerus. Sic in progressionem arithmeticâ æquantur differentiæ primæ, adeoque non dantur secundæ. Et in Serie quadratorum 1, 4, 9, 16, 25, &c. quorum radices sunt æquidifferentes, differentiæ primæ 3, 5, 7, 9, &c. sunt in progressionem arithmeticâ, secundæ sunt æquales, cæque de causâ tertiæ sunt nihil. Sic etiam in Serie cuborum 1, 8, 27, 64, 125, 216, &c. Differentiæ primæ sunt 7, 19, 37, 61, 91, &c. secundæ 12, 18, 24, 30, &c. tertiæ 6, 6, 6, &c. utique æquales; adeoque quartæ nihil.

Et universaliter sint A, B, C, D, E, quantitates quotcunque datæ, z vero variabilis, tum in expressione $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4$ scribe numeros quosvis æquidifferentes successive pro z ; & quantitatum provenientium ultimæ Differentiæ determinabuntur per altissimam dignitatem z^4 , nullâ ratione habitâ ad inferiores. Sic in hoc casu quarta differentia est ultima, propterea quod quarta potestas z^4 sit hic altissima.

Sæpissime differentiæ constituunt Seriem convergentem in casibus quando non abrumpunt. Ut si a, b, c, d, e , &c. sint fere inter se æquales, earumque Differentiæ primæ $b-a, c-b, d-c, e-d$, &c. etiam sibi mutuo fere æquales, atque etiam secundæ similiter & sequentes sibi mutuo quamproxime æquales, tum $a, b-c, c-2b+a, d-3c+3b-a$, &c. constituent Seriem convergentem. Item differentiæ Terminorum quorum relatio definitur Æquatione

$$T \times z^0 + a z^{0-1} + b z^{0-2} + \&c. = T' \times z^0 + c z^{0-1} + d z^{0-2} + \&c.$$

sumptæ ad modum præcedentem conficiunt Seriem convergentem. Sed non expectandum est Differentias quantitatum quarumcumque vel convergere vel abrumpere. Hoc tantum accidit in iis quantitibus quæ increscunt aut decrescunt accurate vel quamproxime eâdem celeritate ac certæ quædam dignitates numerorum æquidifferentium.

De Descriptione Curvarum per data puncta.

Newtonus in Epistolâ ad Oldenburgum Anno 1676 datâ, postquam monstraverat artificium evitandi Series nimium complexas in quadraturâ Curvarum trinomialium; inquit, "Sed hæc minoris facio, quod ubi Series simplices non sunt satis tractabiles, aliam nondum communitam methodum habeo, quâ pro libitu acceditur ad quæsitum. Ejus fundamentum est commoda, expedita, generalis solutio hujus Problematis, Curvam Geometricam describere, quæ per data quotcunque puncta transibit. Docuit Euclides descriptionem Circuli per tria puncta. Potest etiam Sectio Conica describi per quinque data puncta: &c."

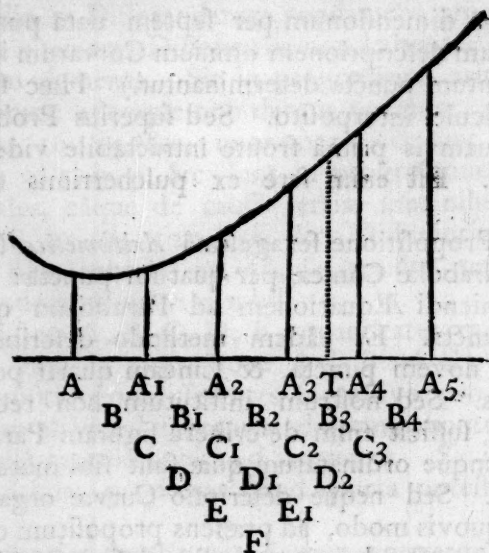
“ & Curva trium dimensionum per septem data puncta; (adeo ut in
 “ potestate habeam descriptionem omnium Curvarum istius ordinis, quæ
 “ per septem tantum puncta determinantur.) Hæc statim Geometrice
 “ fiunt nullo calculo interposito. Sed superius Problema est alterius
 “ generis: & quamvis primâ fronte intractabile videatur; tamen res
 “ aliter se habet. Est enim fere ex pulcherrimis quæ solvere desi-
 “ derem.

Newtonus in Propositione sexagesimâ *Arithmeticæ Universalis*, docet descriptionem Parabolæ Conicæ per quatuor puncta: vel potius docet methodum inveniendi Æquationem ad Parabolam quæ transibit per quatuor data puncta. Et eâdem methodo describere licet Lineam tertii ordinis per novem puncta, & Lineam quarti per quatuordecem. Et sic in reliquis. Sed nostrum institutum non requirit solutionem adeo generalem; sufficit enim describere figuram Parabolicam per extremitates quotcunque ordinarum quæ sunt sibi mutuo, & etiam Axi Curvæ parallelæ. Sed neque descriptio Curvæ organica motu angulorum, aut alio quovis modo, ad præsens propositum conducit: eodem res redit sive Curva actu describatur, sive descripta concipiatur. Curvæ enim hic nullatenus sunt necessariæ, nisi quatenus adjumento sunt intellectui in sitè concipiendo Problemate. Etenim descriptio Parabolæ per data puncta, idem est omnino Problema ac assignatio quantitatum ex datis ipsarum Differentiis; quæ per Algebram solam, idque per resolutionem Æquationum simplicium semper perficitur.

PROPOSITIO XIX.

Detur Series Ordinarum æquidistantium ex una tantum parte pergens in infinitum, & oporteat invenire Lineam Parabolicam quæ transibit per extremitates omnium.

Designent $A, A_1, A_2, A_3, A_4, \&c.$ Ordinatas æquidistantes insistentes Abscissæ normaliter. Collige earum differentias primas $B, B_1, B_2, B_3, \&c.$ secundas $C, C_1, C_2, \&c.$ tertias $D, D_1, \&c.$ & sic porro. Adeo ut A sit Ordinata prima, B differentia prima duarum primarum Ordinarum, C differentia secunda trium primarum Ordinarum, D differentia tertia quatuor primarum & sic deinceps. Differentiæ autem colligi debent auferendo priores ubique de posterioribus; hoc est, ponendo $B = A_1 - A$, $B_1 = A_2 - A_1$, &c. $C = B_1 - B$, &c. & ita porro in reliquis; ponendo eas esse negativas quæ oriuntur ex subductione quantitatis majoris de minore.



Hisce præmissis, sit T quævis Ordinata in genere, primaria vel intermedia, cujus distantia a primâ Ordinâtâ A , nempe AT sit ad intervallum commune æquidistantium: ut quantitas indeterminata z ad unitatem, eritque:

$$T = A +$$

$$B \times \frac{z}{1} +$$

$$C \times \frac{z}{1} \times \frac{z-1}{2} +$$

$$D \times \frac{z}{1} \times \frac{z-1}{2} \times \frac{z-2}{3} +$$

$$E \times \frac{z}{1} \times \frac{z-1}{2} \times \frac{z-2}{3} \times \frac{z-3}{4} +$$

$$F \times \frac{z}{1} \times \frac{z-1}{2} \times \frac{z-2}{3} \times \frac{z-3}{4} \times \frac{z-4}{5} +$$

&c.

Hic est valor Ordinatæ cujusvis T jacentis ad easdem partes Ordinatæ primæ A , ad quas jacent reliquæ: quod si jaceret ad alteras, tum mutandum foret signum Abscissæ z . Etenim Abscissam pono affirmativam quæ ab initio tendit dextram versus inter Ordinatas posteriores; negativam vero quæ ad contrarias partes porrigitur. Propositio autem sic demonstratur.

1.

Concipe.

Concipe Ordinatam T motu parallelo latam deferri super Abscissam, adeo ut successive deveniat ad loca reliquarum. Et quoniam illius distantia ab Ordinâtâ primâ ponitur esse ad intervallum Ordinarum commune ut z ad unitatem; erit z successive æqualis 0, 1, 2, 3, 4, &c. & interea T æqualis Ordinatis A, A₁, A₂, A₃, &c. per vices, cuique in suo loco. Igitur ad eruendas Coefficientes A, B, C, D, &c. quæ efficiunt Parabolam transire per extremitates Ordinarum, in Æ-

quatione ad figuram $T = A + B \frac{z}{1} + C \frac{z}{1} \times \frac{z-1}{2} + D \frac{z}{1} \times \frac{z-1}{2} \times \frac{z-2}{3} + \&c.$ scribe Ordinatas A, A₁, A₂, A₃, &c. successive pro T;

& interea pro z, longitudines Abscissæ ordine sequentes, id est, 0, 1, 2, 3, &c. atque emergent Æquationes

A=A,	Unde A=A,
A ₁ =A+B,	B=A ₁ -A,
A ₂ =A+2B+C,	C=A ₂ -2A ₁ +A,
A ₃ =A+3B+3C+3D,	D=A ₃ -3A ₂ +3A ₁ -A,
A ₄ =A+4B+6C+4D+E,	E=A ₄ -4A ₃ +6A ₂ -4A ₁ +A,
&c.	&c.

Quippe ex valoribus Ordinarum A, A₁, A₂, &c. vicissim eruuntur valores Coefficientium A, B, C, &c. Ex quibus patet Ordinatam primam A esse primam Coefficientem; item differentiam duarum primarum Ordinarum esse Coefficientem secundam; & differentiam secundam primarum trium esse Coefficientem tertiam; & sic in infinitum. Igitur valores Coefficientium in solutione positi efficiunt Parabolam transire per extremitates Ordinarum. Q. E. D.

Idem aliter.

Fingamus esse in genere $T = A + B \frac{z}{1} + C \frac{z}{1} \times \frac{z-1}{2} + D \frac{z}{1} \times \frac{z-1}{2} \times \frac{z-2}{3} + \&c.$ ubi A, B, C, D, &c. sunt Coefficientes determinandæ. Scribe valores variabilium consequentes T', z+1 pro antecedentibus T, z; & emerget $T' = A + B \frac{z+1}{z} + C \frac{z+1}{1} \times \frac{z}{2} + D \frac{z+1}{1} \times \frac{z}{2} \times \frac{z-1}{3} + \&c.$ de quo si subducatur valor ipsius T, habebitur

$T =$

$$T' - T = B + C \frac{z}{1} + D \times \frac{z}{1} \times \frac{z-1}{2} + \&c.$$

Ubi substituendo T'' , T' , $z+1$ pro T' , T , z , prodibit $T'' - T' = B + C \frac{z+1}{1} + D \frac{z+1}{1} \times \frac{z}{2} + \&c.$ a quo valor ipsius $T' - T$ subducus relinquit

$$T'' - 2T' + T = C + D \frac{z}{1} + \&c.$$

Et similiter invenies $T''' - 3T'' + 3T' - T = D + \&c.$ Designet jam T primam Ordinatam, & valor correspondens Abscissæ erit nihil; quo substituto invenies

$$A = T,$$

$$B = T' - T,$$

$$C = T'' - 2T' + T,$$

$$D = T''' - 3T'' + 3T' - T,$$

&c.

Hoc est, prima Coefficientis A æqualis est Ordinatæ primæ T ; secunda B æqualis est differentiæ inter duas primas Ordinatæ T & T' ; tertia C æqualis est differentiæ secundæ trium primarum Ordinarum, T , T' , T'' ; quarta D æqualis est differentiæ tertiæ primarum quatuor Ordinarum; & sic porro in reliquis ut jam demonstratum est.

EXEMPLUM I.

Dentur quinque Ordinatæ 1, 4, 2, 3, 9, per quarum extremitates oportet Parabolam transire. Collige earum differentias primas 3, -2, 1, 6; secundas -5, 3, 5, tertias 8, 2; & ultimam -6. Dein juxta præscripta in solutione Propositionis, pro A , B , C , &c. ponantur Ordinata prima, & prima quæque differentia respective; hoc est, $A=1$, $B=3$, $C=-5$, $D=8$, $E=-6$; at F , G , &c. erunt nihil. Hisce autem valoribus substitutis, prodit Æquatio ad Parabolam

$$T = 1 + 3 \frac{z}{1} - 5 \frac{z}{1} \times \frac{z-1}{2} + 8 \frac{z}{1} \times \frac{z-1}{2} \times \frac{z-2}{3} - 6 \frac{z}{1} \times \frac{z-1}{2} \times \frac{z-2}{3} \times \frac{z-3}{4},$$

quæ in ordinem reducta fit $T = \frac{12 + 116z - 111z^2 + 24z^3 - 3z^4}{12}$. At-

que

que ad probandum opus, scribe 0, 1, 2, 3, 4, successive pro Abscissa z, & pro T provenient Ordinatæ quinque propositæ.

Ceterum Ordinatæ possunt sumi in ordine inverso, modo mutantur signa differentiarum in ordinibus alternis: tunc ponendum est $A=9$, $B=-6$, $C=5$, $D=-2$, $E=-6$; quibus scriptis & Æquatione prodeunte in ordinem redacta, tandem obtinebitur $T=$

$$\frac{108-92z+9z^2+14z^3-3z^4}{12}; \text{ in quâ si pro } z \text{ substituantur } 0, 1, 2, 3, 4,$$

prodibunt Ordinatæ propositæ in ordine inverso. Atque hic obtinentur duæ Æquationes pro eâdem Parabolâ, quoniam Abscissa initium ducit nunc a primâ, nunc ab ultimâ Ordinatâ.

EXEMPLUM II.

Oporteat nunc invenire Æquationem ad Parabolam quæ transit per extremitates sex Ordinarum æqui-

distantium 5, 3, 7, 23, 57, 115. Col-
lige earum differentias primas, reli-
quasque usque dum perventum fuerit
ad ultimas, ut in margine. Et inve-
nias $A=5$, $B=-2$, $C=6$, $D=6$.

5	3	7	23	57	115
-2	4	16	34	58	
	6	12	18	24	
	6	6	6		

Quibus substitutis, oritur

$$T = 5 - 2 \frac{z}{1} + 6 \frac{z}{1} \times \frac{z-1}{2} + 6 \frac{z}{1} \times \frac{z-1}{2} \times \frac{z-2}{3},$$

quæ reducta fit $T = 5 - 3z + z^3$. Et si pro z scribas successive 0, 1, 2, 3, 4, 5, provenient sex Ordinatæ propositæ.

Linea recta transit per duo puncta, Parabola Conica per tria, Cubica per quatuor, Biquadratica per quinque, & sic in infinitum. Nonnunquam vero accidit Curvam inferioris ordinis transire per plura puncta, ut in Exemplo novissimo. Ordo autem Parabolæ semper denotatur per ultimum Ordinem differentiarum. Quod si numerus Ordinarum fit infinitus, & progressio æqualium differentiarum non obveniat, in eo inquam casu Curva erit dimensionum infinitarum, valore ipsius T excurrente in Seriem infinitam.

SCHOLION.

In hac solutione posuimus distantiam communem Ordinarum esse unitatem; verum si pro eadem usurpasset quantitatē quamvis n , prodiiisset

D d

T =

$$T = A + B \times \frac{z}{n} + C \times \frac{z}{n} \times \frac{z-n}{2n} + D \times \frac{z}{n} \times \frac{z-n}{2n} \times \frac{z-2n}{3n} + \&c.$$

Finge jam Ordinatam secundam $A_1 = A + \dot{A}n$,

$$\text{tertiam} - A_2 = A + 2\dot{A}n + \ddot{A}n^2,$$

$$\text{quartam} A_3 = A + 3\dot{A}n + 3\ddot{A}n^2 + \ddot{\ddot{A}}n^3,$$

$$\text{quintam} A_4 = A + 4\dot{A}n + 6\ddot{A}n^2 + 4\ddot{\ddot{A}}n^3 + \ddot{\ddot{\ddot{A}}}n^4, \\ \&c.$$

Et inuenies vicissim $B = \dot{A}n$, $C = \ddot{A}n^2$, $D = \ddot{\ddot{A}}n^3$, $E = \ddot{\ddot{\ddot{A}}}n^4$, &c. quibus valoribus substitutis pro B, C, D, E, &c. orietur

$$T = A + \dot{A} \frac{z}{1} + \ddot{A} \frac{z}{1} \times \frac{z-n}{2} + \ddot{\ddot{A}} \frac{z}{1} \times \frac{z-n}{2} \times \frac{z-2n}{3} + \&c.$$

Eyadat jam intervallum commune n nihil, & $\dot{A}$, $\ddot{A}$, $\ddot{\ddot{A}}$, &c. evadent fluxiones Ordinatæ primæ A , dummodo fluxio Abscissæ z sit unitas; atque proveniet

$$T = A + \dot{A}z + \frac{1}{2} \ddot{A}z^2 + \frac{1}{6} \ddot{\ddot{A}}z^3 + \frac{1}{24} \ddot{\ddot{\ddot{A}}}z^4 + \&c.$$

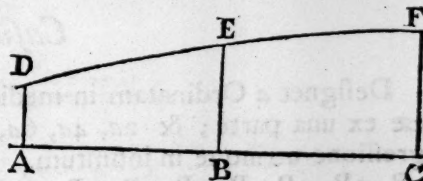
Igitur coincidentibus Ordinatis æquidistantibus, incidimus in Seriem ubi Coefficientes Terminorum sunt fluxiones Ordinatæ primæ respective divisæ per numeros 1, 2, 6, 24, &c. qui generantur per continuam multiplicationem horum, 1, 2, 3, 4, &c. Et hoc primus deprehendit D. Taylor in *Methodo Incrementorum*, & postea Hermanus in Appendice ad *Phoronomiam*.

Hinc si Ordinata Curvæ cujuscunque resolvatur in Seriem hujus formæ $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \&c.$ ubi exponentes Abscissæ z sunt numeri integri & affirmativi; primus Terminus A est prima Ordinata, utique quæ transit per initium Abscissæ; primi duo $A + Bz$ denotant lineam rectam quæ transit per duo Curvæ puncta coincidentia, quæque proinde tangit Curvam; primi tres Termini $A + Bz + Cz^2$ definiunt Parabolam Conicam quæ transit per tria Curvæ puncta coincidentia, quæque eâ de causâ tangit Curvam, eandemque habet Curvaturam in puncto per quod transit Ordinata prima; primi quatuor Termini $A + Bz + Cz^2 + Dz^3$ definiunt Parabolam Cubicam quæ transit per quatuor Curvæ puncta coeuntia, id est, quæ tangit Curvam, eandemque habet Curvaturam & Variationem Curvaturæ in puncto Contactus. Denique tota Series $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \&c.$ est Ordinata Parabolæ dimensionum infinitarum quæ tangit Curvam, & in puncto Contactus, habet eandem Curvaturam, Variationem Curvaturæ,

Variationem Variationis, & sic in infinitum, ut exprimitur a *Newtono* in Propositione decimâ Libri secundi Principiorum. Vel quod eodem redit, tota Series est Ordinata Parabolæ transeuntis per Ordinatæ Curvæ æquidistantes, numero infinitas, & coincidentes cum Ordinatâ primâ.

Hinc ideam habemus analogiæ quæ est inter Methodum Differentialem & Methodum vulgarem Serierum; hæc procedit per Fluxiones five rationes differentiarum ultimas, illa vero generaliter per differentias cujuscunque magnitudinis.

Designet DEF Curvam quamvis, cujus Abscissa AC decussat Ordinatæ æquidistantes AD, BE, CF, ad angulos rectos. Sitque AB = z, AD = A; eritque ex superioribus



$BE = A + \dot{A}z + \frac{1}{2} \ddot{A}z^2 + \frac{1}{6} \ddot{\ddot{A}}z^3 + \frac{1}{24} \ddot{\ddot{\ddot{A}}}z^4 + \&c.$ scilicet hicce valor ipsius BE est Ordinata Curvæ Parabolicæ quæ coincidit cum altera Curva in puncto D: igitur pro Area Curvæ usurpare licet Aream ejusdem Parabolæ, quæ per methodum Fluxionum inversam prodit $ABED = Az + \frac{1}{2} \dot{A}z^2 + \frac{1}{6} \ddot{A}z^3 + \frac{1}{24} \ddot{\ddot{A}}z^4 + \frac{1}{120} \ddot{\ddot{\ddot{A}}}z^5 + \&c.$

Et eâdem prorsus ratione si BE dicatur y, existente AB = BC = z, erit Area

$$BCFE = yz + \frac{1}{2} \dot{y}z^2 + \frac{1}{6} \ddot{y}z^3 + \frac{1}{24} \ddot{\ddot{y}}z^4 + \frac{1}{120} \ddot{\ddot{\ddot{y}}}z^5 + \&c.$$

In quâ si mutetur signum Abscissæ z, obtinebitur Area BEDA negative expressa, scilicet mutando signum Abscissæ obtinetur Area jacens ad alteras partes Ordinatæ. Sed Area illa affirmative expressa evadit

$$BEDA = yz - \frac{1}{2} \dot{y}z^2 + \frac{1}{6} \ddot{y}z^3 - \frac{1}{24} \ddot{\ddot{y}}z^4 + \frac{1}{120} \ddot{\ddot{\ddot{y}}}z^5 - \&c.$$

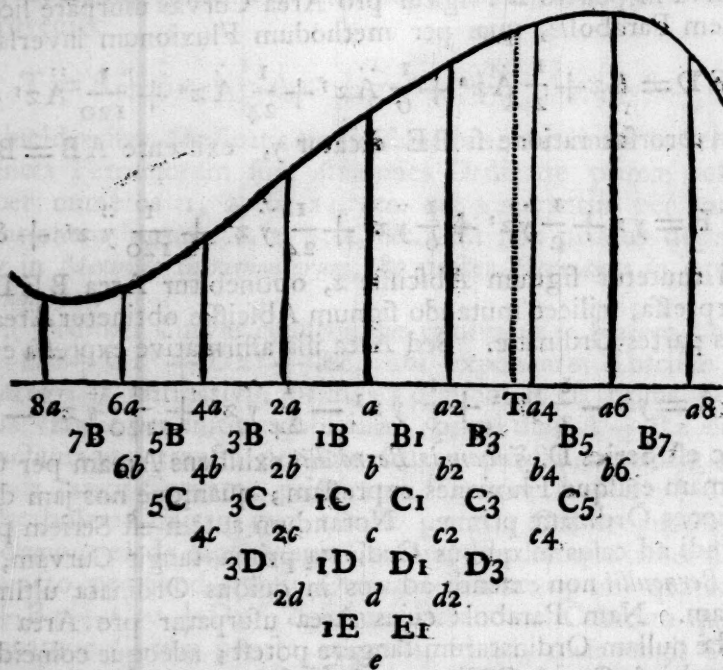
Et hæc est Series D. *Johannis Bernoullii* exhibens Aream per Ordinam ultimam ejusque Fluxiones expressam; quamque nos jam dedimus per Fluxiones Ordinatæ primæ. Notandum autem est Seriem priorem non extendi ad casus in quibus Ordinata prima tangit Curvam, & Seriem D. *Bernoullii* non extendi ad eos in quibus Ordinata ultima tangit Curvam. Nam Parabola cujus Area usurpatur pro Area Curvæ quadrandæ nullam Ordinatarum tangere potest; adeoque coincidere nequit cum alterâ Curvâ Ordinatam suam tangente. Hujusmodi enim Expressiones pro Arcis & Ordinatis Curvarum præsupponunt formam Seriei A + Bz + Cz² + &c. in quâ exponentes Abscissæ z sunt numeri integri & affirmativi.

PROPOSITIO XX.

Detur Series Ordinarum æquidistantium utrinque excurrentis in infinitum, & oporteat invenire Lineam Parabolicam quæ transibit per extremitates omnium.

Casus primus.

Designet a Ordinatam in medio omnium, sintque a_2, a_4, a_6, a_8 , &c. $æ$ ex una parte; & $2a, 4a, 6a, 8a$, &c. $æ$ ex altera; pergente progressionem utrinque in infinitum. Collige earum differentias primas $7B, 5B, 3B, 1B, B_1, B_3, B_5, B_7$; secundas $6b, 4b, 2b, b, b_2, b_4, b_6$; tertias $5C, 3C, 1C, C_1, C_3, C_5$; quartas $4c, 2c, c, c_2, c_4$; & sic porro in reliquis, auferendo semper antecedentes de consequentibus ut in Propositione superiore.



Sint jam a, b, c, d, e , &c. Ordinata media & differentiae in ordinibus alternis respective. Sintque $1B$ & B_1 , $1C$ & C_1 , $1D$ & D_1 , $1E$ & E_1 , &c. duæ mediae differentiae in reliquis ordinibus; & ponantur $B =$

$1B +$

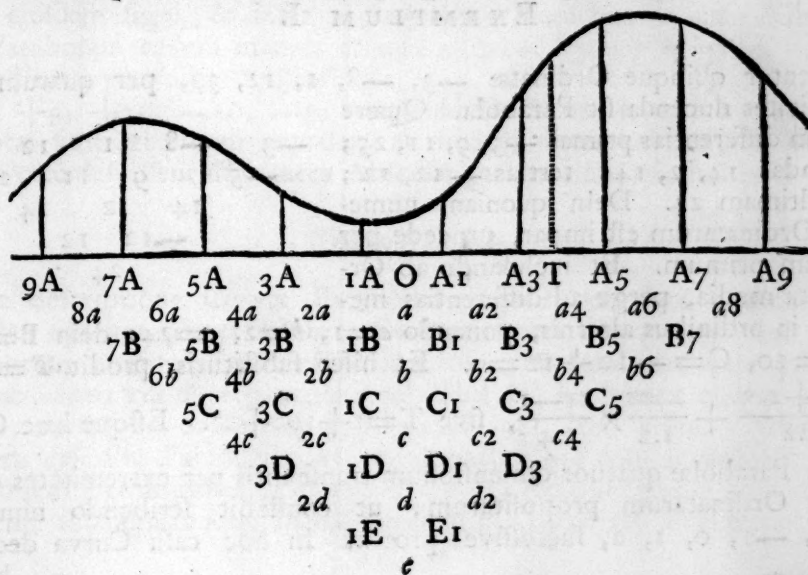
$1B + B1, C = 1C + C1, D = 1D + D1, E = 1E + E1, \&c.$ Sitque intervallum inter Ordinatam quamvis T & mediam a ad intervallum commune æquidistantium ut z ad unitatem; eritque Ordinata

$$T = a + \frac{Bz + bzz}{1.2} + \frac{2Cz + czz}{1.2} \times \frac{zz - 1}{3.4} + \frac{3D + dzz}{1.2} \times \frac{zz - 1}{3.4} \times \frac{zz - 4}{5.6} + \frac{4E + ezz}{1.2} \times \frac{zz - 1}{3.4} \times \frac{zz - 4}{5.6} \times \frac{zz - 9}{7.8} + \frac{5F + fzz}{1.2} \times \frac{zz - 1}{3.4} \times \frac{zz - 4}{5.6} \times \frac{zz - 9}{7.8} \times \frac{zz - 16}{9.10} + \&c.$$

Ubi notandum est Abscissam z esse negativam quando Ordinata quaesita T jacet ad contrarias partes Ordinatae mediae.

Casus secundus.

Sint jam $1A$ & $A1$, Ordinatae duae mediae; $A3, A5, A7, A9, \&c.$ eae ex unâ parte; & $3A, 5A, 7A, 9A, \&c.$ eae ex alterâ. Collige earum differentias primas $8a, 6a, 4a, 2a, a, a2, a4, a6, a8$; secundas $7B, 5B, 3B, 1B, B1, B3, B5, B7$; tertias $6b, 4b, 2b, b, b2, b4, b6, \&c.$ & sic deinceps; subducendo ubique priores de posterioribus



E e

Excerpe

Excerpe nunc differentias medias a, b, c, d, e , &c. ut & duas medias in aliis ordinibus, scilicet $1A$ & A_1 , $1B$ & B_1 , $1C$ & C_1 , $1D$ & D_1 , $1E$ & E_1 , &c. & ponantur $A=1A+1A_1$, $B=1B+1B_1$, $C=1C+1C_1$, $D=1D+1D_1$, $E=1E+1E_1$, &c. sit vero O punctum in medio inter Ordinatæ duas medias $1A$ & A_1 . Et cujufvis Ordinatæ T distantia a medio puncto, nempe OT sit ad intervallum commune æquidistantium ut z ad Binarium: Eritque

$$T = \frac{A+az}{2} + \frac{3B+bz}{2} \times \frac{zz-1}{4.6} + \frac{5C+cz}{2} \times \frac{zz-1}{4.6} \times \frac{zz-9}{8.10} + \frac{7D+dz}{2} \times \frac{zz-1}{4.6} \times \frac{zz-9}{8.10} \times \frac{zz-25}{12.14} + \frac{9E+ez}{2} \times \frac{zz-1}{4.6} \times \frac{zz-9}{8.10} \times \frac{zz-25}{12.14} \times \frac{zz-49}{16.18} + \&c.$$

Et in hoc quoque casu z est affirmativa quando T jacet ad easdem partes puncti medii O ac in Schemate, & negativa quando jacet ad contrarias. Uterque autem casus facillime demonstratur ad modum Propositionis superioris.

EXEMPLUM I.

Dentur quinque Ordinatæ $-3, -8, 1, 12, 37$, per quarum extremitates ducenda sit Parabola. Quære earum differentias primas $-5, 9, 11, 25$; $-3 \quad -8 \quad 1 \quad 12 \quad 37$ secundas $14, 2, 14$; tertias $-12, 12$; $-5 \quad 9 \quad 11 \quad 25$ & ultimam 24 . Dein quoniam numerus Ordinarum est impar, procede per Casum primum. Et inchoando ab Ordinata media, perge ad differentias medias in ordinibus alternis, ponendo $a=1$, $b=2$, $c=24$; dein $B=9+11=20$, $C=-12+12=0$. Et hisce substitutis, prodit $T=1+$
 $\frac{20z+2zz}{1.2} + \frac{24zz}{1.2} \times \frac{zz-1}{3.4}$, five $T=1+10z+z^4$. Estque hæc Ordi-

nata Parabolæ quatuor dimensionum transeuntis per extremitates quinque Ordinarum propositarum, ut constabit scribendo numeros $-2, -1, 0, 1, 2$, successive pro z . In hoc casu Curva decussat basin,

basin, quoniam Ordinatae sunt partim negativae & partim affirmativae.

EXEMPLUM II.

Dentur jam sex Ordinatae 1, 5, 10, 10, 5, 1 per quarum extremitates oportet ducere Parabolam. Quære earum differentias ut in margine: & quoniam numerus Ordinarum est par, adhibeatur Casus secundus. Tum incipiendo ab Ordinatis duabus mediis, & progrediendo ad binas medias differentias, erit $A=10+10=20$, $B=-5-5=-10$, $C=6+6=12$; deinde $a=0$,

1	5	10	10	5	1
4	5	0	-5	-4	
	1	-5	-5	1	
		-5	0	6	
			6	6	
				0	

$b=0$, $c=0$. Quibus valoribus substitutis, erit $T = \frac{20}{2} - \frac{30}{2} \times \frac{zz-1}{4.6} + \frac{60}{2} \times \frac{zz-1}{4.6} \times \frac{zz-9}{8.10}$; quæ Aequatio in ordinem reducta evadit $T = \frac{689-50z^2+z^4}{64}$. Atque ad probandam operationem, scribe $-5, -3,$

$-1, 1, 3, 5$, successive pro z , & exhibunt Ordinatae propositae. Etenim in casu Propositionis secundo, intervallum commune Ordinarum, sive, quod perinde est, incrementum Abscissae aequatur Binario.

In hoc Exemplo desunt dignitates Abscissae imparium dimensionum, quoniam Ordinatae a principio Abscissae hinc inde aequaliter distantes sunt ejusdem signi, & inter se aequales. Nam hoc in casu Aequatio ad Parabolam eadem manet, etiam si mutetur signum Abscissae. Quod si Ordinatae propositae fuissent $+1, -5, +10, -10, +5, -1$, vel $+1, +5, +10, -10, -5, -1$, ubi Ordinatae a medio aequaliter remotae sunt etiamnum aequales, at diversis signis affectae; in eo inquam casu defuissent dignitates Abscissae parium dimensionum.

SCHOLION.

De descriptione Curvae Parabolici generis per data quocunque puncta, egerunt plures celebres Geometrae post *Newtonum*. Sed omnes eorum solutiones eadem sunt cum hisce jam exhibitis; quæ quidem a *Newtonianis* vix discrepant, uti constabit ex Lemmate quinto Libri tertii *Principiorum & methodo Differentiali* a D. *Jones* edita. *Newtonus* quidem describit Parabolam per data puncta, alii consideraverunt assignationem Terminorum ex datis differentiis; sed quocunque modo concipiatur, sub quâcunque formâ proferatur, idem est Problema. Et sane

fane inventio formarum quas habent valores Ordinatæ T, est perquam ingeniosa & summo Auctore digna: at postquam habentur formæ, investigatio Problematis est facilis, in quam utique nihil aliud requiritur quam resolutio Æquationum simplicium.

Sed notandum est formam Ordinatæ $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \&c.$ ex potestatibus compositæ, quam assumit *Newtonus* in demonstrando suæ methodi fundamento, male huic negotio destinatam esse. Nam valor cujusque Coefficientis prodit in Serie infinita; si quis vero assumeret formas hic usurpatas, incidet minimo labore in conclusiones superiores.

PROPOSITIO XXI.

Data Serie Terminorum primariorum invenire intermedios, qui non longe distant a principio.

Super rectam positione datam ad angulos rectos, & in æqualibus ab invicem distantiis erigantur Ordinatæ respective æquales Terminis primariis; dein per Propositiones duas superiores quærat Linea Parabolica quæ transsit per omnium extremitates, & eadem quoque transibit per extremitates intermediorum; qui itaque dabuntur ex data Æquatione ad Parabolam. Q. E. I.

EXEMPLUM I.

Interpolanda sit Series 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{16}$, $\frac{35}{128}$, $\frac{63}{256}$, &c. cujus Termini producantur per multiplicationem continuam numerorum $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{8}$, &c. quære differentias Terminorum & differentias differentiarum, ut sequitur.

$$\begin{array}{cccccc}
 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} & \frac{5}{16} & \frac{35}{128} & \frac{63}{256} \&c. \\
 -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{16} & -\frac{5}{128} & -\frac{7}{256} & \\
 & \frac{3}{8} & \frac{1}{16} & \frac{3}{128} & \frac{3}{256} & \\
 & & -\frac{5}{16} & -\frac{5}{128} & -\frac{7}{256} & \\
 & & & \frac{35}{128} & \frac{7}{256} & \\
 & & & & -\frac{63}{256} &
 \end{array}$$

Quoniam

Quoniam hæc Series ex unâ tantum parte excurrit in infinitum, peragenda est Interpolatio per Propositionem decimam nonam. Et si primus Terminus 1 adhibeatur pro Ordinata prima, erit $A=1$, $B=-\frac{1}{2}$, $C=+\frac{3}{8}$, $D=-\frac{5}{16}$, $E=+\frac{35}{128}$, &c. quibus substitutis, prodit

$$T = 1 - \frac{1}{2} \times \frac{z}{1} + \frac{3}{8} \times \frac{z}{1} \times \frac{z-1}{2} - \frac{5}{16} \times \frac{z}{1} \times \frac{z-1}{2} \times \frac{z-2}{3} + \&c.$$

id est, $T = 1 - \frac{1}{2} A \frac{z}{1} - \frac{3}{4} B \frac{z-1}{2} - \frac{5}{6} C \frac{z-2}{3} - \frac{7}{8} D \frac{z-3}{4} - \&c.$

Ubi jam A, B, C, D, &c. designant Terminos hujus Seriei, more *Newtoni*. Ceterum Terminus quilibet primarius usurpari potest pro Ordinata prima, eritque $A=\frac{1}{2}$, $B=-\frac{1}{8}$, $C=+\frac{1}{16}$, $D=-\frac{5}{128}$,

$E=+\frac{7}{256}$, &c. adeoque

$$T = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \times \frac{z}{1} + \frac{1}{16} \times \frac{z}{1} \times \frac{z-1}{2} - \&c.$$

id est, $T = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} A \frac{z}{1} - \frac{3}{6} B \frac{z-1}{2} - \frac{5}{8} C \frac{z-2}{3} - \frac{7}{10} D \frac{z-3}{4} - \&c.$

Sed sciendum est z esse distantiam inter Terminum quæsitum & illum qui adhibetur pro Ordinata prima. Ut si Terminus desideratus T

stet in medio inter primum & secundum, pone $+\frac{1}{2}$ pro z in priore

valore ipsius T; & $-\frac{1}{2}$ pro eadem in posteriore valore; atque pro eodem Terminò habebis duas Series sequentes

$$1 - \frac{1}{4} A + \frac{3}{16} B + \frac{15}{36} C + \frac{35}{64} D + \frac{63}{100} E + \&c.$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{8} A + \frac{9}{24} B + \frac{25}{48} C + \frac{49}{80} D + \frac{81}{120} E + \&c.$$

Et quoniam hæ Series convergunt quam lentissime, summandæ sunt per Theorema in Scholio Propositionis decimæ primæ. Atque sciendum est valores Terminorum prodire simplicissimos quando Terminus qui consistit proximus intermedio quæsito, adhibetur pro Ordinata prima. Sed quando Terminus quæsitus longissime distat ab initio, usui venit Propositio decima octava, ut monstrabitur in sequentibus.

EXEMPLUM II.

Interpolanda sit Series 1, 1, 2, 6, 24, 120, 720, &c. cujus Termini generantur per multiplicationem continuam numerorum 1, 2, 3, 4, 5, &c. Quoniam hi Termini increscunt celerrime, eorum differentiaë conficiunt progressionem divergentem, id quod impedit quo minus Ordinata Parabolæ accedat ad veritatem. In hoc igitur & similibus casibus interpo-
 Logarithmos Terminorum, quorum utique differentiaë constituere que-
 unt Seriem celeriter convergentem, etiamsi ipsi Termini increscunt ce-
 lerrime ut in Exemplo præsentē.

Propono jam inventionem Termini qui consistit in medio inter duos primos 1 & 1. Et quoniam Logarithmi Terminorum initialium habent differentias lente convergentes, primum quæram Terminus in medio consistentem inter duos ab initio satis remotos, verbi gratiâ, inter decimum primum 3628800 & decimum secundum 39916800: & ex eo dato regrediar ad Terminus quæsitum per Propositionem decimam sextam. Quumque habeantur aliquot Termini consistentes ex utrâque parte intermedii qui primo eruendus est, instituo operationem per Casum secundum Propositionis vigesimæ. Etenim ubi computus non est in speciebus, sed in numeris, procedere licet hâc methodo quotiescunque datur satis amplus Terminorum numerus ex utraque parte Termini quæsitī consistentium, etiamsi ipsa Series interpolanda reap-
 se non excurrat utrinque in infinitum.

Excerpo nunc ex Tabula Logarithmos duodecim Terminorum, quorum primus est is Termini sexti 120; sic ut habeantur sex ante, totidemque post illum qui quæritur. Dein quoniam Terminus ille desideratus consistit directe in medio omnium, erit in Casu secundo Propositionis vigesimæ primæ Abscissa $z=0$; & propterea differentiaë primæ, tertiæ, reliquæque ordinum imparium quæ in z multiplicantur, non ingredientur computum; igitur tantummodo colligo differentias secundas, quartas, ceterasque in ordinibus paribus ut vides

Logarithmi

Interpolatio Serierum.

III

Logarithmi	Diff. 2dæ	quartæ	sextæ	octavæ	decimæ
2.0791812460	669467896	21154180	2568588	541511	156590
2.8573324964	579919470	14443928	1446210	259252	65082
3.7024305364	511525224	10302264	865343	133583	
4.6055205234	457574906	7606810	543728	72996	
5.5597630329	413926852	5776699	355696	240660	
6.5597630329	377885608	4490316	2869602		
7.6011557180	347621063	3559629			
8.6803369641	321846834	2869602			
9.7942803164	299632234				
10.9404083521	280287236				
12.1164996111					
13.3206195938					

Excerpo jam binos medios Logarithmos, binasque medias differentias; eorumque Summas pono æquales A, B, C, D, &c. respective ut vides

$$\begin{array}{rcl}
 \begin{array}{r} 6.5597630329 \\ 7.6011557180 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{r} 413926852 \\ 377885608 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{r} 7606810 \\ 5776699 \\ \hline \end{array} \\
 A = 14.1609187509, & B = 791812460, & C = 13383509, \\
 \\
 \begin{array}{r} 865343 \\ 543728 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{r} 259252 \\ 133583 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{r} 156590 \\ 65082 \\ \hline \end{array} \\
 D = 1409071, & E = 392835, & F = 221672,
 \end{array}$$

Tum in Casu secundo Propositionis vigesimæ primæ; substituo o pro z, & habeo

$$T = \frac{1}{2} A - \frac{1}{16} B + \frac{3}{256} C - \frac{5}{2048} D + \frac{35}{65536} E - \frac{63}{524288} F + \&c.$$

Scribe jam ipsorum A, B, C, D, E, F, valores mox repertos, & computus sic se habebit

$$\begin{array}{rcl}
 \begin{array}{r} 7.08045937545 \\ 1568380 \\ 2098 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{r} 494882787 \\ 34401 \\ 266 \\ \hline \end{array} \\
 + 7.08047508023 & - 494917454 &
 \end{array}$$

Ac subducendo Summam Terminorum negativorum ab eâ affirmativorum, remanet $T = 7.07552590569$. Estque hic Logarithmus numeri 11899423.08, utique qui consistit in medio inter Terminos 3628800 & 39916800.

Jam

Interpolatio Serierum.

Jam sicuti Termini primarii formantur ducendo primum continue in numeros 1, 2, 3, 4, &c. ita per Propositionem decimam sextam, intermedii generantur ducendo intermedium inter primum & secundum in

numeros $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{2}$, &c. continue. Verbi gratiâ productum

sub decem factoribus $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{2}$, $5\frac{1}{2}$, $6\frac{1}{2}$, $7\frac{1}{2}$, $8\frac{1}{2}$, $9\frac{1}{2}$, $10\frac{1}{2}$,

& Termino qui consistit in medio inter primum & secundum, æquale est intermedio mox invento 11899423.08, cujus utique locus est in medio inter decimum primum & decimum secundum. Igitur si Terminus

ille intermedius dividatur per $10\frac{1}{2}$, & quotus per $9\frac{1}{2}$, & quotus

novissimus per $8\frac{1}{2}$, & sic porro usque ad divisorem $1\frac{1}{2}$; ultimus quo-

torum æqualis erit Termino in medio inter 1 & 1. Termini vero intermedii per divisionem illam prodeuntes sunt

Primarii	Intermedii
39916800	-11899423.08
3628800	-1133278.389
362880	-119292.4620
40320	-14034.40729
5040	-1871.254305
720	-287.8852777
120	-52.34277777
24	-11.63172839
6	-3.323350969
2	-1.329340388
1	-.8862269251
1	-1.7724538502

Unde constat Terminum inter 1 & 1 esse .8862269251; cujus quadratum est .7853... &c. scilicet Area Circuli cujus Diameter est unitas. Atque illius Termini duplus 1.7724538502, scilicet qui consistit ante primum primum dimidio intervalli communis, æqualis est Radici quadrati numeri 3.1415926.... &c. qui denotat Circumferentiam Circuli.

Circuli, cujus Diameter est unitas. Etenim si quadrata primariorum constituent novam Seriem 1, 1, 4, 36, 576, 14400, &c. Terminus in medio inter primum & secundum erit ad unitatem ut Area Circuli ad quadratum circumscriptum: & Terminus qui consistit ante primum dimidio intervalli communis erit ad unitatem ut Circumferentia Circuli ad Diametrum. Ceterum in sequentibus monstrabitur hujusmodi Series interpolari posse absque Logarithmis.

EXEMPLUM III.

Quadranda sit Curva cujus Ordinata est $x^{\theta-1} \times \sqrt[e+f x^\eta]{\lambda}$. Scribe 0, 1, 2, 3, &c. successive pro indice λ , & proveniet Series Ordinarum æquidistantium $x^{\theta-1} \times \sqrt[e+f x^\eta]{0}$, $x^{\theta-1} \times \sqrt[e+f x^\eta]{1}$, $x^{\theta-1} \times \sqrt[e+f x^\eta]{2}$, &c. inter quas Ordinata proposita locum obtinet intervallo λ distantem ab initio. Igitur Area quæsitâ eundem etiam obtinebit locum inter Areas illarum Ordinarum, quæ constituunt progressionem sequentem Terminorum æquidistantium,

$$\frac{1}{\theta} x^\theta, \frac{e}{\theta} x^\theta + \frac{f}{\theta+1} x^{\theta+1}, \frac{e^2}{\theta} x^\theta + \frac{2ef}{\theta+1} x^{\theta+1} + \frac{f^2}{\theta+2} x^{\theta+2}, \&c.$$

Jam si hæc Area interpolarentur per Propositionem decimam nonam, proveniret pro Area quæsitâ, eadem Series ac per methodum vulgarem reducendi Ordinatam in Seriem convergentem ut exinde inveniatu fluens. Attamen si Termini in Serie Arearum primo dividantur per Terminos hujus progressionis Geometricæ respective, nempe $\sqrt[e+f x^\eta]{0}$, $\sqrt[e+f x^\eta]{1}$, $\sqrt[e+f x^\eta]{2}$, $\sqrt[e+f x^\eta]{3}$, &c. Hoc est, si ponantur

$$A = x^\theta \times \frac{\frac{1}{\theta}}{\sqrt[e+f x^\eta]{0}},$$

$$A_1 = x^\theta \times \frac{\frac{e}{\theta} + \frac{f x^\eta}{\theta+1}}{\sqrt[e+f x^\eta]{1}},$$

$$A_2 = x^\theta \times \frac{\frac{e^2}{\theta} + \frac{2ef x^\eta}{\theta+1} + \frac{f^2 x^{2\eta}}{\theta+2}}{\sqrt[e+f x^\eta]{2}},$$

$$A_3 = x^\theta \times \frac{\frac{e^3}{\theta} + \frac{3e^2 f x^\eta}{\theta+1} + \frac{3ef^2 x^{2\eta}}{\theta+2} + \frac{f^3 x^{3\eta}}{\theta+3}}{\sqrt[e+f x^\eta]{3}},$$

&c.

G g

&

& instituaturs computus juxta Propositionem decimam nonam, invenientur differentia

$$B = \frac{-\eta f x^{\theta+1}}{\theta \cdot \theta + \eta \cdot e + f x^{\eta}}, C = \frac{+2\eta^2 f^2 x^{\theta+2\eta}}{\theta \cdot \theta + \eta \cdot \theta + 2\eta \cdot e + f x^{\eta^2}}, D = \frac{-6\eta^3 f^3 x^{\theta+3\eta}}{\theta \cdot \theta + \eta \cdot \theta + 2\eta \cdot \theta + 3\eta \cdot e + f x^{\eta^3}}, \&c.$$

quibus substitutis pro A, B, C, D, &c. & λ pro z ; invenies Terminum distantia λ ab initio remotum, esse

$$\frac{x^{\theta}}{\theta} - \frac{\lambda \eta f x^{\theta+1}}{\theta \cdot \theta + \eta \cdot e + f x^{\eta}} + \frac{\lambda \cdot \lambda - 1 \cdot \eta^2 f^2 x^{\theta+2\eta}}{\theta \cdot \theta + \eta \cdot \theta + 2\eta \cdot e + f x^{\eta^2}} - \frac{\lambda \cdot \lambda - 1 \cdot \lambda - 2 \cdot \eta^3 f^3 x^{\theta+3\eta}}{\theta \cdot \theta + \eta \cdot \theta + 2\eta \cdot \theta + 3\eta \cdot e + f x^{\eta^3}} + \&c.$$

Sed quia Termini interpolandi divisi erant per dignitates ipsius $e + f x^{\eta}$, quisque scilicet per dignitatem cujus index erat distantia Termini ab initio; e contra duc Terminum mox inventum in dignitatem prædicti binomii, cujus index est λ , sua utique distantia ab initio, & pro Area Curvæ habebitur

$$\frac{x^{\theta}}{\theta} \times e + f x^{\eta}{}^{\lambda} \text{ in } 1 - \frac{\lambda \eta f x^{\eta}}{\theta + \eta \cdot e + f x^{\eta}} + \frac{\lambda \cdot \lambda - 1 \cdot \eta^2 f^2 x^{2\eta}}{\theta + \eta \cdot \theta + 2\eta \cdot e + f x^{\eta^2}} - \&c.$$

Vel ponendo $y = \frac{f x^{\eta}}{e + f x^{\eta}}$, $r = \frac{\theta + \eta}{\eta}$; atque scribendo Seriem more *Newtoni*, prodibit

$$\frac{x^{\theta}}{\theta} \times e + f x^{\eta}{}^{\lambda} = \frac{\lambda}{r} A y - \frac{\lambda - 1}{r + 1} B y + \frac{\lambda - 2}{r + 2} C y - \frac{\lambda - 3}{r + 3} D y - \&c.$$

pro Area Curvæ cujus Ordinata in genere est $x^{\theta-1} \times e + f x^{\eta}{}^{\lambda}$. Et hæc Series transmutata per Propositionem septimam, migrabit in eam *Newtoni* pro quadraturâ Curvæ binomialis. Abrumpit quando index λ est integer & affirmativus; sed post debitam Ordinatæ præparationem abrumpet semper ubi Curva est quadrabilis. Ceterum ejus usus præcipuus est quod exhibeat Areas in Serie admodum simplici. Si Coefficientes e , f , contrariis signis afficiantur, præferenda est Series *Newtoni*; & nostra ubi iisdem.

EXEMPLUM IV.

Oporteat assignare Uncias Binomii ex data Uncia media in dignitate cujus index est numerus par. Si n denotet indicem dignitatis, & Uncia media ducatur continue in fractiones $\frac{n}{n+2}$, $\frac{n-2}{n+4}$, $\frac{n-4}{n+6}$, &c. facta erunt Unciæ reliquæ consistentes ex utraque parte mediæ.

$$a_6 = a \times \frac{n}{n+2} \times \frac{n-2}{n+4} \times \frac{n-4}{n+6},$$

$$a_4 = a \times \frac{n}{n+2} \times \frac{n-2}{n+4},$$

$$a_2 = a \times \frac{n}{n+2},$$

$$a = a,$$

$$2a = a \times \frac{n}{n+2},$$

$$4a = a \times \frac{n}{n+2} \times \frac{n-2}{n+4},$$

$$6a = a \times \frac{n}{n+2} \times \frac{n-2}{n+4} \times \frac{n-4}{n+6},$$

Et si a designet Unciam mediam, tum a_2 , a_4 , a_6 , &c. ex una parte; & $2a$, $4a$, $6a$, &c. ex alterâ designabunt reliquas Uncias. Dein ineundo computum per casum primum Propositionis vigesimæ invenies

$$a - \frac{rr}{2.n+2} A - \frac{rr-4}{4.n+4} B - \frac{rr-16}{6.n+6} C - \frac{rr-36}{8.n+8} D - \&c.$$

esse Terminum Seriei interpolandæ, cujus distantia a Termino media a est ad intervallum commune primariorum ut r ad Binarium. Exempli gratiâ, in dignitate decimâ secundâ Unciæ sunt 1, 12, 66, 220, 495, 792, 924, 792, &c. existente Unciâ mediâ $a=924$. Et si quærat eam quæ ternario distat a media, erit $r=6$; quo substituto, & 12 pro n ; prodit

$$924 - \frac{36}{2.14} A - \frac{32}{4.16} B - \frac{20}{6.18} C,$$

pro Uncia quæsitâ, abrumpente Serie: & hi Termini liberati a fractionibus sunt $925 - 1188 + 594 - 110$, quorum summa sub propriis signis est 220, qui est valor Unciæ quæsitæ.

Et ad eundem modum si index n sit numerus impar, & A altera e mediis Unciis; tum erit

$$A - \frac{rr-1}{2.n+3} A - \frac{rr-9}{4.n+5} B - \frac{rr-25}{6.n+7} C - \frac{rr-49}{8.n+9} D - \&c.$$

Uncia cujus distantia a puncto inter duas medias Uncias intermedio, est ad intervallum commune ut r ad Binarium.

Et hæ Series in permagna dignitate convergent dummodo intervallum inter Unciam mediam & quæsitam sit exiguum respectu indicis potestatis.

SCHOLION.

SCHOLION.

Postquam Series interpolanda debite præparatur per Propositionem decimam septimam; etiamsi eadem utrinque excurrat in infinitum procedere licet per Propositionem decimam nonam præterquam ubi Termini a medio hinc inde æqualiter distantes sunt inter se æquales: ubi hoc accidit, adhibeatur casus primus Propositionis vigesimæ, si Terminus quivis primarius quodam jure vindicet locum in medio omnium: vel si duo Termini eodem jure locum medium vindicent, adhibeatur casus secundus ejusdem Propositionis. Et in aliis casibus ad libitum fere proceditur.

PROPOSITIO XXII.

Data Serie Terminorum æquidistantium, invenire Terminum quemvis primarium vel intermedium utcunque longe distantem ab initio Seriei.

Si Terminus quæsitus longe removetur a principio, tum per Propositionem decimam octavam quære aliam Seriem in qua Terminus ille desideratus constituet Terminum prope initium, dein procede ut in Propositione superiore.

EXEMPLUM I.

Proponatur invenire Terminum quemvis hujus Seriei, $1, \frac{2}{1}A, \frac{4}{3}B, \frac{6}{5}C, \frac{8}{7}D, \&c.$ a principio quantumvis magno intervallo m distantem. Per Propositionem decimam octavam, Terminus Seriei

$$1, \frac{a}{m+1}, \frac{2b}{m+2}, \frac{3c}{m+3}, \frac{4d}{m+4}, \&c.$$

qui consistit ante primum dimidio intervalli communis, æqualis erit Termino Seriei prioris cujus intervallum ab initio est m . Constat autem per Exemplum secundum Propositionis vigesimæ primæ, Terminum dimidio intervalli communis distantem ante primum in Serie Numeratorum, $1, 1.1, 1.1.2, 1.1.2.3, \&c.$ id est, in hac $1, 1, 2, 6, 24, 120, \&c.$ esse Radicem quadratam Numeri $3.1415926 \dots \&c.$ Quare tantum interpo Denominatores nempe

$$1, \frac{1}{m+1}, \frac{1}{m+1.m+2}, \frac{1}{m+1.m+2.m+3}, \&c.$$

Et

Interpolatio Serierum.

117

Et quoniam hæc Series continuari potest utrinque in infinitum; astu continuabitur, & evadet

$$\&c. \frac{1}{m-2}, \frac{1}{m-1}, m, m+1, \frac{1}{m+1}, \frac{1}{m+1}, \&c.$$

Ubi Terminus quæsitus consistit in medio inter duos medios m & 1 : sed quia differentiæ horum Terminorum sunt permagnæ; ducantur ii a medio hinc inde æqualiter distantes in se mutuo; hoc est, m in 1 ;

$\frac{1}{m-1}, m$ in $\frac{1}{m+1}$; & sic porro; & prodibit nova Series

$$\&c. \frac{m-2}{m+2}, \frac{m-1}{m+1}, m, \frac{m-1}{m+1}, m, m, m, \frac{m-1}{m+1}, \frac{m-1}{m+1}, \frac{m-2}{m+2}, \&c.$$

utrinque excurrans in infinitum, & habens Terminos inter se æquales qui æqualiter distant a medio. Sed & Terminus in medio consistens inter duos medios primarios m & m est quadratum ejus in medio inter m & 1 in Serie priore. In novissimâ igitur Serie quærat Terminus ille inter m & m per Casum secundum Propositionis vigesimæ, & idem inveniatur

$$m + \frac{m}{4.m+1} + \frac{9m}{32.m+1.m+2} + \frac{75m}{128.m+1.m+2.m+3} + \&c.$$

Quam ducito in Circumferentiam Circuli, scilicet Terminum respectivum in Serie Numerorum, & habebis pro quadrato Termini quæsitum

$$3.14159 \dots \&c. \text{ in } m + \frac{A}{4.m+1} + \frac{9B}{8.m+2} + \frac{25C}{12.m+3} + \frac{49D}{16.m+4} + \&c.$$

Igitur Terminus Seriei propositæ $1, \frac{2}{1} A, \frac{4}{3} B, \frac{6}{5} C, \&c.$ distans intervallo m ab initio æqualis est mediæ proportionali inter Circumferentiam Circuli & Seriem illam; quæ eo citius convergit quo major est m , hoc est quo longius distat ab initio Terminus quæsitus.

Exempli gratiâ sit $n=100$ & primus Terminus Seriei erit Circumferentia Circuli ducta in 100 , sive $A=314.15927$; dein erit

$$B = \frac{A}{4.101} = .77762, C = \frac{9B}{8.102} = .00858, D = \frac{25C}{12.103} = \frac{314.15927}{77762}$$

$= .00017$; atque summa horum quatuor Terminorum est 314.94564 , cujus Radix quadrata 17.7467079 est Terminus centesimus primus Seriei interpolandæ; sive productum 314.94564

sub factoribus $\frac{2}{1} \times \frac{4}{3} \times \frac{6}{5} \times \frac{8}{7}, \&c.$ quorum numerus est

Centum. Et eadem ratione invenire licet Terminum quemvis intermedium:

H h

medium: nam si pro m scribatur $99\frac{1}{2}$, habebitur Terminus in medio inter centesimum & centesimum primum. Vel si substituatur $99\frac{1}{3}$ pro m , habebitur Terminus consistens post centesimum tertiâ parte intervalli communis.

Notandum est, posse Terminorum alicujus Seriei reciprocos interpolari: sic reciproci Terminorum in Serie novissimâ constituunt Seriem

$1, \frac{1}{2} A, \frac{3}{4} B, \frac{5}{6} C, \frac{7}{8} D, \&c.$ in qua Terminus ab initio remotus intervallo quovis æquali $\frac{1}{2} m$, æqualis erit Termino Seriei

$$1, \frac{a}{m+1}, \frac{3b}{m+3}, \frac{5c}{m+5}, \frac{7d}{m+7}, \&c.$$

qui consistit in medio inter primum & secundum; quique proinde invenietur esse media proportionalis inter Seriem sequentem

$$\frac{1}{m+1} + \frac{A}{2.m+3} + \frac{9B}{4.m+5} + \frac{25C}{6.m+7} + \frac{49D}{8.m+9} + \&c.$$

& numerum .6366197723676 qui æqualis est unitati divisæ per femicircumferentiam Circuli: id quod constabit insistendo vestigiis prioris partis hujus Exempli.

EXEMPLUM II.

Quærat^r Terminus hujus Seriei $1, \frac{2}{1} A, \frac{5}{4} B, \frac{8}{7} C, \frac{11}{10} D, \&c.$ quantumvis remotus ab initio; scilicet intervallo m : & per Propositionem decimam octavam Terminus ille æquabitur Termino hujus Seriei

$$1, \frac{2a}{3m+2}, \frac{5b}{3m+5}, \frac{8c}{3m+8}, \frac{11d}{3m+11}, \&c.$$

qui consistit ante primum tertiâ parte intervalli communis. Igitur intercalentur Numeratores & Denominatores seorsim ut in Exemplo secundo Propositionis vigesimæ primæ, scilicet per Logarithmos; & habebitur Terminus quæsitus.

SCHOLION.

Hinc constat Terminos Serierum longissime distantes erui posse non minus accurate ac intermedii sub initio. Sed in Serie interpolandâ $1,$

$\frac{r}{p}$

$\frac{r}{p}$ A, $\frac{r+1}{p+1}$ B, &c. si differentia inter p & r sit magna, magnus item erit labor in inveniendis quovis Terminis. Casus autem omnium facilissimus est ubi $p-r$ est æqualis $\pm \frac{1}{2}$, ut in Exemplo primo, præterquam ubi differentia illa est numerus integer quo in Casu Series erit accurate interpolabilis.

PROPOSITIO XXIII.

Invenire rationem quam habet Uncia media ad Summam omnium Unciarum in quacunque dignitate binomii.

Solutio prior.

Si index dignitatis sit numerus par, appelletur n ; vel si sit impar, vocetur $n-1$; eritque ut Uncia media ad Summam omnium ejusdem dignitatis, ita Unitas ad mediam proportionalem inter semicircumferentiam Circuli & alterutram Serierum sequentium

$$n + \frac{A}{2.n+2} + \frac{9B}{4.n+4} + \frac{25C}{6.n+6} + \frac{49D}{8.n+8} + \frac{81E}{10.n+10} + \&c.$$

Vel

$$n+1 = \frac{A}{2.n-3} - \frac{9B}{4.n-5} + \frac{25C}{6.n-7} - \frac{49D}{8.n-9} + \frac{81E}{10.n-11} - \&c.$$

Exempli gratiâ, si quærat ratio Unciæ mediæ ad Summam omnium in dignitate centesimâ vel nonagesimâ nonâ, erit $n=100$; qui multiplicatus in semiperiferiam Circuli, producit primum Terminum $A=157.079632679$; dein erit $B=\frac{A}{204}$, $C=\frac{9B}{416}$, $D=\frac{25C}{636}$, &c. atque perficiendo computum ut in margine, invenietur Summa Terminorum 157.866984459, cujus Radix quadrata 12.5645129018 est ad unitatem ut Summa omnium Unciarum ad mediam in dignitate centesimâ vel nonagesimâ nonâ. Est autem hic computus per priorem Seriem: nam licet exigua sit differentia, præfero eam in quâ Termini sunt omnes ejusdem signi.

157.079632679
769998199
16658615
654820
37137
2734
246
26
3
157.866984459

Solutio

Solutio posterior.

Manente n ut antea; erit Summa omnium Unciarum ad mediam in subduplicatâ ratione peripheriæ Circuli ad alterutram Serierum sequentium,

$$\frac{1}{n+1} + \frac{A}{2.n+3} + \frac{9B}{4.n+5} + \frac{25C}{6.n+7} + \frac{49D}{8.n+9} + \frac{81E}{10.n+11} + \&c.$$

Vel

$$\frac{1}{n} - \frac{A}{2.n-2} - \frac{9B}{4.n-4} + \frac{25C}{6.n-6} + \frac{49D}{8.n-8} + \frac{81E}{10.n-10} + \&c.$$

Vel quod eodem redit, ponatur $a = .6366197723676$, quoto scilicet qui prodit dividendo unitatem per semicircumferentiam Circuli; & media proportionalis inter numerum a & alterutram illarum Serierum erit ad unitatem ut Uncia media ad summam omnium.

Ut si fit index $n = 100$, ut in computo superiore; erit per Seriem primam $A = \frac{a}{101}$, $B = \frac{A}{206}$, $C = \frac{9B}{429}$, $D = \frac{25C}{642}$, &c. Ex calculo autem appo-

sito patet Summam Terminorum esse

.00633444670787, ejus Radix quadrata

.0795892373872 est ad unitatem ut Uncia media

ad Summam omnium in dignitate nonagesimâ nonâ vel centesimâ.

Et sic omnino sunt quatuor Series ejusdem simplicitatis pro solutione hujus Problematis. Ceterum in praxi non opus est recurrere ad Series: nam sufficit sumere me-

diam proportionalem inter semicircumferentiam Circuli & $n + \frac{1}{2}$; hæc

enim semper approximabit propius quam duo primi Termini Seriei, quorum etiam primus solus plerumque sufficit. Exempli gratiâ, si sit

$n = 100$, erit $n + \frac{1}{2} = 100 \frac{1}{2}$, qui ductus in semicircumferentiam Circuli producit 157.865, ejus Radix quadrata est 12.5644, unitate deficiens in ultimâ figurâ.

Eadem vero approximatio aliter & praxi forte commodior sic enunciatur. Pone c ad unitatem ut quadratum Diametri ad Circulum; hoc est, sit $c = 1.2732395447352$; eritque summa Unciarum ad mediam ut

Uncia

Unitas ad $\sqrt{\frac{c}{2n+1}}$ quamproxime, existente errore in excessu circiter $\frac{1}{16nn} \sqrt{\frac{c}{2n+1}}$. Sit $n=100$, erit $\frac{c}{2n+1} = .006334525$, ejusque Radix quadrata .07958973 accurata est in sextâ decimali: quæ vero divisa per $16nn$, hoc est per 160000, dabit correctionem .00000050; & hæc subducta de Approximatione, relinquit numerum quæsitum .07958923 accuratum in ultima figurâ.

Similiter sit $n=900$, erit $\frac{c}{2n+1} = .000706962545$, cujus Radix quadrata .026588767 superat verum binario in ultimâ figurâ. Sin vero correctio computetur ac subducatur de Approximatione, habebitur numerus quæsitus accuratus in decimâ tertia decimali.

Hem vero Approximationem æque facilem & magis accuratam. Differentia inter Logarithmos numerorum $n+2$ & $n-2$, dividatur per 16, & quotus adjiciatur dimidio Logarithmi indicis n , huic dein summæ addatur Logarithmus constans .0980599385151, scilicet dimidium Logarithmi femicircumferentiæ Circuli, & summa novissima erit Logarithmus numeri qui est ad unitatem ut summa Unciarum ad mediam. Verbi gratiâ, sit $n=900$, computus erit

$\frac{1}{2} l, 900$	1.4771212547
16) Diff. Log. 902 & 898	.0001206376
Log. constans	.0980599385
Summa	<u>1.5753018308</u>

Et hæc Summa verum superat binario, in ultimâ figurâ, estque Logarithmus numeri 37.6098698 qui est ad unitatem ut summa Unciarum ad mediam in potestate 900 vel 899. Et si vis illius numeri reciprocum, sume complementum Logarithmi, scilicet -2.4246981692 , & numerus eidem correspondens erit .0265887652 qui monstrat rationem Unciæ mediæ ad summam omnium in prædictis dignitatibus.

DEMONSTRATIO.

Dignitates Binomii, quarum indices sunt numeri pares, habent unam Unciam mediam; eæ vero, quarum indices sunt impares, habent duas Uncias medias. Et hinc oriuntur duo Casus Problematis. Primo quando index est par, divide summas Unciarum 1, 4, 16, 64, 256, 1024, &c. per suas Uncias medias, 1, 2, 6, 20, 70, 252, &c. & quoti

1, 2, $\frac{8}{3}$, $\frac{16}{5}$, $\frac{128}{35}$, $\frac{256}{63}$, &c. five 1, $\frac{2}{1}$ A, $\frac{4}{3}$ B, $\frac{6}{5}$ C, $\frac{8}{7}$ D, &c. e-

I i

runt

runt ad unitatem ut summæ Unciarum ad Uncias medias in diversis dignitatibus.

Similiter si summæ Unciarum in dignitatibus imparibus, scilicet 2, 8, 32, 128, 512, &c. dividantur per Uncias suas medias 1, 3, 10, 35, 126, &c. rursus prodibunt idem quoti, utpote 2, $\frac{8}{3}$, $\frac{16}{5}$, $\frac{128}{35}$, &c.

Nam eadem est relatio inter summam Unciarum & Unciam mediam in quavis dignitate pare, quæ est inter summam Unciarum & Unciam mediam in dignitate impare proxime inferiori. Adeoque interpolatio Seriei, 1, $\frac{2}{1}$ A, $\frac{4}{3}$ B, $\frac{6}{5}$ C, $\frac{8}{7}$ D, &c. ut in Exemplo primo Propositionis vigesimæ secundæ, solvit utrumque Casum Problematis. Sed hic dabimus investigationem harum Serierum absque methodo Differentiali.

Analysis Solutionis prioris.

Series interpolanda 1, $\frac{2}{1}$ A, $\frac{4}{3}$ B, &c. definitur Æquatione $T' = \frac{n+2}{n+1} T$, ubi n est quantitas variabilis, ejusque valores successivi 0, 2, 4, 6, 8, &c. scilicet indices dignitatum quando sunt pares, vel indices aucti unitate quando sunt impares. Quadra utramque partem Æquationis resolvendæ, & habebitur $T' T' = \frac{nn+4n+4}{nn+2n+1} T T$ vel quod idem est $2T' T' + \frac{1}{n+2} \times T T - T' T' - \frac{T' T'}{n+2} = 0$. Assume jam

$$T T = A n + \frac{B n}{n+2} + \frac{C n}{n+2.n+4} + \frac{D n}{n+2.n+4.n+6} + \&c.$$

Et post debitam reductionem juxta præcepta jam tradita, invenies

$$T T = A n + B + \frac{C-2B}{n+2} + \frac{D-4C}{n+2.n+4} + \&c.$$

In quâ scribe valores variabilium consequentes pro antecédentibus, hoc est, $T' T'$ pro $T T$, & $n+2$ pro n , & emerget

$$T' T' = A \overline{n+2} + B + \frac{C-2B}{n+4} + \frac{D-4C}{n+4.n+6} + \&c.$$

Tum sumendo horum valorum differentiam, & ducendo eandem in $n+2$, prodibit

$$\overline{n+2} \times T T - T' T' = -2 A \overline{n+2} + \frac{2C-4B}{n+4} + \frac{4D-16C}{n+4.n+6} + \&c.$$

Ceterum

Ceterum in valore ipsius TT prius assumpto, si scribatur $n+2$ pro n , habebitur

$$T'T' = \overline{n+2} \text{ in } A + \frac{B}{n+4} + \frac{C}{n+4.n+6} + \frac{D}{n+4.n+6.n+8} + \&c.$$

Atque dividendo per $n+2$,

$$\frac{T'T'}{n+2} = A + \frac{B}{n+4} + \frac{C}{n+4.n+6} + \frac{D}{n+4.n+6.n+8} + \&c.$$

Substituere jam in Æquatione resolvenda, valores ipsorum $T'T'$, $\overline{n+2} \times$

$TT - T'T'$ & $\frac{T'T'}{n+2}$, ad eandem formam reductos, & resultabit

$$2B - A + \frac{4C - 9B}{n+4} + \frac{6D - 25C}{n+4.n+6} + \frac{8E - 49D}{n+4.n+6.n+8} + \&c. = 0.$$

Denique ponendo Numeratores nihilo æquales, habebis $2B - A = 0$, $4C - 9B = 0$, $6D - 25C = 0$, $8E - 49D = 0$, &c. Et hæ sunt relationes Coefficientium in prima Serie. Et ad eundem modum eruitur Series posterior in Solutione prior.

Analysis Solutionis posterioris.

Solutio posterior perficitur interpolando Seriem $1, \frac{1}{2}a, \frac{3}{4}b, \frac{5}{6}c, \frac{7}{8}d$, &c. cujus Termini sunt reciproci eorum in prior: ea vero definitur Æquatione $T' = \frac{n+1}{n+2} T$, in qua valores ipsius n successivi sunt $0, 2, 4, 6, 8$, &c. ut ante. Et quadrando evadit $T'T' = \frac{nn+2n+1}{nn+4n+4} TT$, hoc est, $\overline{n+1}.\overline{n+3} TT - T'T' - 2.\overline{n+1} TT - T'T' = 0$.

Fingamus nunc

$$TT = \frac{A}{n+1} + \frac{B}{n+1.n+3} + \frac{C}{n+1.n+3.n+5} + \frac{D}{n+1.n+3.n+5.n+7} + \&c.$$

Et substituendo $n+2$ pro n , proveniet

$$T'T' = \frac{A}{n+3} + \frac{B}{n+3.n+5} + \frac{C}{n+3.n+5.n+7} + \frac{D}{n+3.n+5.n+7.n+9} + \&c.$$

adeoque

adeoque

$$\frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{n+3} \cdot \overline{TT - TT} = 2A + \frac{4B}{n+5} + \frac{6C}{n+5 \cdot n+7} + \frac{8D}{n+5 \cdot n+7 \cdot n+9} + \&c.$$

quæ ad debitam formam reducta fit

$$2A + \frac{4B}{n+3} + \frac{6C-8B}{n+3 \cdot n+5} + \frac{8D-49C}{n+3 \cdot n+5 \cdot n+7} + \&c.$$

Scribe jam hosce valores in Æquatione resolvenda, atque resultabit

$$\frac{2B-A}{n+3} + \frac{4C-9B}{n+2 \cdot n+5} + \frac{6E-25C}{n+3 \cdot n+5 \cdot n+7} + \frac{8E-49D}{n+3 \cdot n+5 \cdot n+7 \cdot n+9} + \&c. = 0.$$

Ubi Numeratores æquati nihilo, dabunt relationem Coefficientium Seriei prioris in Solutione posteriore.

Quod autem Coefficiens A sit in uno Casu semicircumferentia Circuli, & ejusdem reciproca in altero, sic demonstratur. Per Seriem

priorem est $TT = An$ in $1 + \frac{1}{2 \cdot n+2} + \&c.$ Et quo major est n , eopropius Æquatio $TT = An$, accedet ad veritatem, quoniam Termini posteriores tandem evadent infinite minores prioribus. Igitur in Æ-quatione $TT = An$, vel $A = \frac{TT}{n}$, si pro n successive scribantur ejusvalores, 2, 4, 6, 8, 10, &c. & simul quadrata Terminorum correspondentium pro TT ; orientur Æquationes continue approximantes ad verum ipsius A valorem, scilicet

$$A = 2,$$

$$A = 2 \times \frac{8}{9},$$

$$A = 2 \times \frac{8}{9} \times \frac{24}{25},$$

$$A = 2 \times \frac{8}{9} \times \frac{24}{25} \times \frac{48}{49},$$

&c.

Quare valor ipsius A est factum sub omnibus $2 \times \frac{8}{9} \times \frac{24}{25} \times \frac{48}{49} \times \frac{80}{81} \times \&c.$ usque in infinitum; quod æquale est semicircumferentiæ Circuli per *Arithmetica Infinitorum Wallisii*.

PROPOSITIO

PROPOSITIO XXIV.

Si in Ordinata Curvæ $x^{r+z-1} \times \overline{1-x}^{p-r-1}$ scribantur successive numeri integri 0, 1, 2, 3, 4, &c. pro z , dico eandem esse relationem inter Areas Ordinarum provenientium, quæ est inter Terminos Seriei a , $\frac{r}{p}a$, $\frac{r+1}{p+1}b$, $\frac{r+2}{p+2}c$, $\frac{r+3}{p+3}d$, &c. modo abscissa x sit æqualis unitati.

Sint enim Areae & Ordinatæ correspondentes

Areae	Ordinatæ
A	$x^{r-1} \times \overline{1-x}^{p-r-1}$
B	$x^r \times \overline{1-x}^{p-r-1}$
C	$x^{r+1} \times \overline{1-x}^{p-r-1}$
D	$x^{r+2} \times \overline{1-x}^{p-r-1}$
E	$x^{r+3} \times \overline{1-x}^{p-r-1}$
&c.	&c.

Tum comparando hasce Areas per Propositionem septimam Newtoni de Quadraturâ Curvarum, invenies

$$B = \frac{rA - x^r \times \overline{1-x}^{p-r}}{p},$$

$$C = \frac{(r+1)B - x^{r+1} \times \overline{1-x}^{p-r}}{p+1},$$

$$D = \frac{(r+2)C - x^{r+2} \times \overline{1-x}^{p-r}}{p+2},$$

$$E = \frac{(r+3)D - x^{r+3} \times \overline{1-x}^{p-r}}{p+3},$$

&c.

Sit jam x æqualis unitati, ut in Theoremate ponitur; eritque $1 - x = 0$; quo in casu relatio Arearum fit $B = \frac{r}{p} A$, $C = \frac{r+1}{p+1} B$, $D = \frac{r+2}{p+2} C$, $E = \frac{r+3}{p+3} D$, &c. Adeoque eadem est relatio inter Areas harum Curvarum & Terminos Seriei propositæ, quando Abscissa x est unitas. Q. E. D.

Corollarium. Hinc in Serie $a, \frac{r}{p} a, \frac{r+1}{p+1} b, \frac{r+2}{p+2} c$, &c. si z denotet intervallum inter primum Terminum a , & alium quemvis T primum vel intermedium; erit ut Area Curvæ cujus Ordinata est $x^{r-1} \times \overline{1-x}^{p-r-1}$ ad Aream Curvæ cujus Ordinata est $x^{r+z-1} \times \overline{1-x}^{p-r-1}$, ita Terminus primus a ad alium quemvis primum vel intermedium, intervallo z distantem ab initio.

EXEMPLUM I.

Detur Series intercalanda $1, \frac{1}{2}a, \frac{3}{4}b, \frac{5}{6}c, \frac{7}{8}d$, &c. Quoniam differentia communis tum Numeratorum tum Denominatorum est 2; divide eosdem per binarium, ut differentia illa fiat unitas ut in Theoremate; & evadet Series $1, \frac{1}{2}a, \frac{3}{2}b$, &c. quæ collata cum ea in Propositione, dat $p=1, r=\frac{1}{2}$; quibus substitutis, erit ut Area Ordinatæ $x^{-\frac{1}{2}} \times \overline{1-x}^{-\frac{1}{2}}$ ad Aream Ordinatæ $x^{z-\frac{1}{2}} \times \overline{1-x}^{-\frac{1}{2}}$, id est, ut Area hujus $\frac{1}{\sqrt{x-xx}}$ ad Aream hujus $\frac{x^z}{\sqrt{x-xx}}$ ita primus Terminus Seriei, five unitas ad alium quemvis primum vel intermedium intervallo z distantem ab initio.

Ut si Terminus desideratus consistat in medio inter primum & secundum, erit $z = \frac{1}{2}$, quo in Casu fit Ordinata posterior $\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x-xx}}$, five $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$: adeoque ut Area Ordinatæ $\frac{1}{\sqrt{x-xx}}$ ad Aream Ordinatæ $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$, id est, ut Circumferentia Circuli 3.1415926 --- &c. ad 2, ita unitas ad Terminum in medio inter primum & secundum; qui hoc pacto prodit .63661977 --- &c.

Si

Si ejusdem Seriei quærat^r Terminus centesimus primus, erit $z = 100$; adeoque ut 3.1415 --- &c. ad Aream Ordinatæ $\frac{x^{100}}{\sqrt{x-xx}}$, ita unitas ad Terminum Propositum. Et similiter ponendo $z = 100 \frac{1}{2}$, Terminus in medio inter centesimum primum & centesimum secundum determinabitur per Circumferentiam Circuli & Aream Ordinatæ $\frac{x^{100}}{\sqrt{1-x}}$: ubique tamen sumendo partes Arearum quæ jacent supra Abscissam unitati æqualem.

Possunt etiam Terminorum reciproci interpolari, idque nonnunquam magis commode quam ipsi Termini. Reciproci Terminorum in novissima Serie sunt $1, \frac{2}{1}a, \frac{4}{3}b, \frac{7}{3}c, \frac{10}{11}d, \&c.$ adeoque est $r = 1, p = \frac{1}{2}$; & inde ut Area Ordinatæ $x^0 \times \overline{1-x}^{-\frac{1}{2}}$ ad Aream Ordinatæ $x^z \times \overline{1-x}^{-\frac{1}{2}}$ ita primus Terminus ad illum distantem intervallo z ab initio: id est, ut 2 ad Aream Ordinatæ $\frac{x^z}{1-x\sqrt{1-x}}$; nam prior Curvæ est quadrabilis.

EXEMPLUM II.

Interpolanda fit Series $1, \frac{1}{2}a, \frac{4}{5}b, \frac{7}{8}c, \frac{10}{11}d, \&c.$ Divide Números & Denominatores per eorum incrementum 3; & invenies $p = \frac{2}{3}, r = \frac{1}{3}$; hinc fit Ordinata prior $x^{-\frac{2}{3}} \times \overline{1-x}^{-\frac{1}{3}}$, five $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-2x^3+x^4}}$; & posterior $\frac{x^z}{\sqrt[3]{x^2-2x^3+x^4}}$. Dein ut Area illius ad Aream hujus ita primus Terminus Seriei ad alium quemcunque cujus distantia ab initio est z .

PROPOSITIO XXV.

Si in Ordinata Curvæ $x^{p-z} \times \overline{1-x}^{r+z-1}$ scribantur successive numeri integri 0, 1, 2, 3, 4, &c. pro z , eadem erit relatio inter Areas Ordinarum provenientium quæ

quæ est inter Terminos Seriei $a, \frac{r}{p}a, \frac{r+1}{p-1}b, \frac{r+2}{p-2}c, \frac{r+3}{p-3}d, \&c.$ Ubi Numeratores continue increfcunt, Denominatores vero decrefcunt. Et hic quoque pono Abfciffam x unitati æqualem.

Hæc Propofitio demonftratur ad modum fuperioris.

Corollarium. Hinc in Serie $a, \frac{r}{p}a, \frac{r+1}{p-1}b, \frac{r+2}{p-2}c, \frac{r+3}{p-3}d, \&c.$ ut Terminus primus a ad alium quemvis intervallo z diftantiem a principio, ita Area Curvæ cujus Ordinata eft $x^p \times \frac{1}{1-x}^{r-1}$ ad Aream Curvæ cujus Ordinata eft $x^{p-z} \times \frac{1}{1-x}^{r+z-1}$.

EXEMPLUM I.

Detur Series interpolanda $1, \frac{n}{1}a, \frac{n-1}{2}b, \frac{n-2}{3}c, \frac{n-3}{4}d, \&c.$ cujus Termini funt Unciæ binomii in dignitate cujus index eft n . Quoniam hæc Series non cadit directe fub hac Propofitione, interpolo Terminorum reciprocos $1, \frac{1}{n}a, \frac{2}{n-1}b, \frac{3}{n-2}c, \&c.$ quo pacto erit $r=1$, $p=n$; adeoque ut Area Ordinatæ $x^n \times \frac{1}{1-x}^0$ ad Aream Ordinatæ $x^{n-z} \times \frac{1}{1-x}^z$, ita unitas ad Terminum intervallo z diftantiem a principio, in Serie pofteriore: vel ut Area Ordinatæ $x^{n-z} \times \frac{1}{1-x}^z$ ad $\frac{1}{n+1}$, ita unitas ad Terminum in priore Serie, intervallo z remotum ab initio.

Ut fi defideretur Uncia Termini quinti in dignitate nona, erit $n=9$, $z=4$; quibus fcriptis, erit Area Ordinatæ $x^5 \times \frac{1}{1-x}^4$ ad $\frac{1}{10}$ ut unitas ad Unciam quæfitam. Ordinata autem evoluta eft $x^5 - 4x^6 + 6x^7 - 4x^8 + x^9$, ejusque Area $\frac{1}{6} - \frac{4}{7} + \frac{6}{8} - \frac{4}{9} + \frac{1}{10}$, five $\frac{1}{1260}$; Tum ut $\frac{1}{1260}$ ad $\frac{1}{10}$ ita unitas ad 126, quæ eft Uncia propofita.

EXEMPLUM

EXEMPLUM II.

Si in potestate simplici Binomii, quærat^r Terminus qui consistit in medio inter duas Uncias 1 & 1; erit index binomii $n=1$, $z=\frac{1}{2}$; & exinde ut Area Ordinatæ $x^{\frac{1}{2}} \times 1 - x^{\frac{1}{2}}$ ad $\frac{1}{2}$, hoc est, ut Area Circuli ad quadratum Circumscriptum ita unitas ad Terminum inter Uncias 1 & 1.

SCHOLION.

Quando Curvæ quadrandæ sunt plurimarum dimensionum, inveniendæ sunt aliquot earum Ordinatæ per Tabulam Logarithmorum; ex quibus dabuntur Areæ per Parabolam *Newtoni*. Quod si relatio Terminorum in Serie interpolanda sit inter plures Terminos, absolvetur interpolatio per Comparationem aliarum Curvarum. Sed hanc materiam missam faciens adjungam quædam de aliis methodis interpolandi.

PROPOSITIO XXVI.

Si Series interpolanda sit 1, $\frac{r}{p}a$, $\frac{r+1}{p+1}b$, $\frac{r+2}{p+2}c$, $\frac{r+3}{p+3}d$, &c.

Et ponatur $n=r-p$, atque

$$B = \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \text{ in } A,$$

$$C = \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{2} \text{ in } B + \frac{n}{3} A,$$

$$D = \frac{n-2}{3} \cdot \frac{n-3}{2} \text{ in } C + \frac{n-1}{3} B + \frac{n}{3} \cdot \frac{n-1}{4} A,$$

$$E = \frac{n-3}{4} \cdot \frac{n-4}{2} \text{ in } D + \frac{n-2}{3} C + \frac{n-1}{3} \cdot \frac{n-2}{4} B + \frac{n}{3} \cdot \frac{n-1}{4} \cdot \frac{n-2}{5} A,$$

$$F = \frac{n-4}{5} \cdot \frac{n-5}{2} \text{ in } E + \frac{n-3}{3} D + \frac{n-2}{3} \cdot \frac{n-3}{4} C + \frac{n-1}{3} \cdot \frac{n-2}{4} \cdot \frac{n-3}{5} B + \frac{n}{3} \cdot \frac{n-1}{4} \cdot \frac{n-2}{5} \cdot \frac{n-3}{6} A,$$

&c.

L 1

Tum

Tum erit z^n in $A + \frac{B}{z} + \frac{C}{z^2} + \frac{D}{z^3} + \frac{E}{z^4} + \&c.$ Terminus Seriei interpolandæ primarius vel intermedius, cujus distantia ab initio est $z-p$.

Notandum est Coefficientem A, per Propositionem decimam octavam æqualem esse Terminum in Serie Numeratorum 1, ra , $r+1.b$, $r+2.c$, &c. distantem intervallo $p-r$ ab initio; eamque determinari per Exemplum secundum Propositionis vigesimæ primæ.

DEMONSTRATIO.

Series proposita definitur Æquatione differentiali $T' = \frac{z+n}{z} T$, ubi est $n=r-p$ ut in Theoremate & successivi valores indeterminatæ z sunt p , $p+1$, $p+2$, &c. Finge jam

$$T = z^n \text{ in } A + \frac{B}{z} + \frac{C}{z^2} + \frac{D}{z^3} + \frac{E}{z^4} + \&c.$$

dein pro T & z scribe earum valores succedentes T' & $z+1$, respective, & emerget

$$T' = \overline{z+1}^n \text{ in } A + \frac{B}{z+1} + \frac{C}{z+1^2} + \frac{D}{z+1^3} + \frac{E}{z+1^4} + \&c.$$

Vel evolvendo dignitates

$$T' = z^n \text{ in } A + \frac{nA+B}{z} + \frac{nA+2B.n-1+2C}{z^2} + \frac{nA+3B.n-1.n-2+6.n-2.C+6D}{z^3} + \&c.$$

Æquatio resolvenda $T' = \frac{z+n}{z} T$, hunc in modum scribatur $T'z - Tz - Tn = 0$; & in eadem substituantur valores ipsorum T & T' , atque resultabit

$$z^n \text{ in } \frac{n.n-1.A-2B}{2z} + \frac{nA+3B.n-1.n-2-12C}{6z^2} + \&c. = 0.$$

Ponantur jam Numeratores æquales nihil, & habebuntur $B = \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2}$ in

A , $C = \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{2}$ in $B + \frac{n}{3} A$, &c. Atque producendo computum, reliquæ Coefficientes prodibunt in Theoremate. Q. E. D.

EXEMPLUM

EXEMPLUM I.

Proponatur Series 1, $\frac{1}{2} a$, $\frac{3}{4} b$, $\frac{5}{6} c$, $\frac{7}{8} d$, &c. quæ definitur Æ-
quatione $T' = \frac{z - \frac{1}{2}}{z} T$, in qua valores successivi ipsius z sunt 1, 2, 3,
4, &c. hæc comparata cum Æquatione $T' = \frac{z - n}{z} T$, dat $n = -\frac{1}{2}$;
& exinde

$$\begin{aligned} B &= \frac{3}{8} \text{ in } A && = A \times \frac{3}{8}, \\ C &= \frac{15}{16} \text{ in } B - \frac{1}{6} A && = A \times \frac{25}{128}, \\ D &= \frac{35}{24} \text{ in } C - \frac{3}{6} B + \frac{1}{16} A && = A \times \frac{105}{1024}, \\ E &= \frac{63}{32} \text{ in } D - \frac{5}{6} C + \frac{5}{16} B - \frac{1}{32} A && = A \times \frac{1659}{32768}, \\ F &= \frac{99}{40} \text{ in } E - \frac{7}{6} D + \frac{35}{48} C - \frac{7}{32} B + \frac{7}{384} A && = A \times \frac{6237}{262144}, \\ &&& \text{\&c.} \end{aligned}$$

Adeoque

$$T = \frac{A}{\sqrt{z}} \text{ in } 1 + \frac{3}{8z} + \frac{25}{128z^2} + \frac{105}{1024z^3} + \frac{1659}{32768z^4} + \frac{6237}{262144z^5} + \text{\&c.}$$

Quantitas autem A in hujusmodi Exemplis sic determinari possit.
Per relationem Terminorum interpolandorum quære primarium quem-
vis satis longe distantem ab initio, verbi gratiâ decimum sextum, qui
hic prodit .144464448 --- &c. Hunc scribe pro T & interea pro z
valorem suum correspondentem, nempe 16; atque habebis

$$.144464448 = \frac{A}{4} \text{ in } 1 + \frac{3}{8 \cdot 16} + \frac{25}{128 \cdot 16 \cdot 16} + \text{\&c.}$$

vel colligendo Terminos in unam Summam, $.144464448 = \frac{A}{4} \text{ in}$
 1.02422627 , unde prodit $A = .564189583548$: quo dato dabitur T
in alio quovis casu per Terminos paucissimos sui valoris.

EXEMPLUM

EXEMPLUM II.

Interpolanda fit Series $1, \frac{2}{1} a, \frac{5}{4} B, \frac{8}{7} c, \frac{11}{10} d, \&c.$ quæ definitur
 Æquatione $T' = \frac{z + \frac{1}{3}}{z} T$, existentibus $\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{10}{3}, \&c.$ valoribus
 Abscissæ z successivis: hæc comparata cum Æquatione in Theoremate
 dat $n = \frac{1}{3}$; quo substituto obtinebitur

$$T = A \sqrt[3]{z} \text{ in } 1 - \frac{1}{9z} * + \frac{5}{2187z^3} + \frac{253}{19683z^4} + \frac{5610}{177147z^5} + \&c.$$

Jam ad eruendum Coefficientem A , quæro Terminum decimum
 quartum Seriei interpolandæ, qui prodit 4.652136: hunc deinde va-
 lorem scribe pro T , & pro z valorem suum decimum quartum $\frac{40}{3}$, at-
 que habeo

$$4.652136 = A \sqrt[3]{\frac{40}{3}} \text{ in } 1 - \frac{1}{120} + \frac{1}{345600} + \&c.$$

Vel extrahendo radicem cubicam numeri $\frac{40}{3}$, & colligendo Terminos in
 unam summam, obtineo $4.652136 = A \times 2.351505$, adeoque $A =$
 1.978365 . Datâ nunc A , Terminus quilibet alius invenietur summa
 facilitate. Quærat is qui consistit tertiâ parte intervalli communis
 ante millesimum primum: pro z scribe suum valorem correspon-
 tem 1000, & valor ipsius T prodibit 10 A in $1 - \frac{1}{9000}$, five $T =$
 19.78343 . Nam ubi Terminus desideratus longe distat a principio &
 computus non est producendus ad plurimas figuras perpauci Termini
 in valore ipsius T abunde sufficiunt.

SCHOLIUM.

Eodem modo quo in hac Propositione Radix extrahitur ex Æ-
 quatione $T' = \frac{z + n}{z} T$, extrahitur etiam ex aliâ quâvis quæ sub hac
 formâ continetur

$$T \times z^0 + a z^{0-1} + b z^{0-2} + \&c. = T' \times z^0 + c z^{0-1} + d z^{0-2} + \&c.$$

Nam

Nam est index $n=a-$ per Propositionem sextam; & inde forma Seriei pro T assumenda erit

$$T = Az^n + Bz^{n-1} + Cz^{n-2} + \&c.$$

Quippe in hujusmodi Seriebus quæ sunt Radices Æquationum Differentialium, indices ipsius z habent Unitatem pro decremento, præterquam in quibusdam casibus valde particularibus. Habito igitur indice ipsius z in primo Terminò habetur forma Seriei assumendæ pro Radice T: dein scribendo $z+1$ pro z , & T' pro T, prodibit

$$T' = A(z+1)^n + B(z+1)^{n-1} + C(z+1)^{n-2} + \&c.$$

Tum reducendo hunc valorem ad formam ipsius T, ut supra ostensum est, & ducendo utrumque valorem in quantitates quas præcipit Æquatio resolvenda; dabuntur Coefficientes assumptæ ex collatione membrorum homologorum in Æquatione resultante

PROPOSITIO XXVII.

Si Æquatio ad Seriem sit $T' = \frac{zz}{zz+r} T$, erit Radix

$$T = A + \frac{r}{z} A + \frac{r+1}{2.z+2} B + \frac{r+4}{3.z+3} C + \frac{r+9}{4.z+4} D + \frac{r+16}{5.z+5} E + \&c.$$

Æquatio resolvenda $T' = \frac{zz}{zz+r} T$ hunc in modum scribatur $zzT - zzT' - rT' = 0$, & assumatur

$$T = A + \frac{B}{z} + \frac{C}{z.z+1} + \frac{D}{z.z+1.z+2} + \frac{E}{z.z+1.z+2.z+3} + \&c.$$

Eritque

$$T' = A + \frac{B}{z+1} + \frac{C}{z+1.z+2} + \frac{D}{z+1.z+2.z+3} + \frac{E}{z+1.z+2.z+3.z+4} + \&c.$$

Unde

$$T - T' = \frac{B}{z.z+1} + \frac{2C}{z.z+1.z+2} + \frac{3D}{z.z+1.z+2.z+3} + \frac{4E}{z.z+1.z+2.z+3.z+4} + \&c.$$

Et ducendo in zz

$$zzT - zzT' = \frac{Bz}{z+1} + \frac{2Cz}{z+1.z+2} + \frac{3Dz}{z+1.z+2.z+3} + \frac{4Ez}{z+1.z+2.z+3.z+4} + \&c.$$

Atque per reductionem

$$zzT - zzT' = B + \frac{2C-B}{z+1} + \frac{3D-4C}{z+1.z+2} + \frac{4E-3D}{z+1.z+2.z+3} + \&c.$$

M m

Hunc

Hunc valorem scribe pro $zzT - zzT'$, & pro T' suum valorem hactenus repertum, atque resultabit

$$B - rA + \frac{2C - r+1B}{z+1} + \frac{3D - r+4C}{z+1.z+2} + \frac{4E - r+9D}{z+1.z+2.z+3} + \&c. = 0.$$

Et per collationem membrorum homologorum, $B = \frac{r}{1}A$, $C = \frac{r+1}{2}B$,

$D = \frac{r+4}{3}C$, $E = \frac{r+9}{4}D$, &c. Hi sunt valores Coefficientium: quod

si A , B , C , &c. denotent totos Terminos, prodibit valor ipsius T jam assignatus. Q. E. D.

EXEMPLUM.

Invenit *Wallisius*, ultimum Terminum hujus Seriei $1, \frac{8}{9}A, \frac{24}{25}B, \frac{48}{49}C, \frac{80}{81}D$, &c. esse Aream Circuli cujus Diameter est unitas; ubi Denominatores sunt quadrata numerorum imparium, & unitate majores Numeratoribus. Videamus autem hic quisnam sit ultimus Terminus hujus $1, \frac{4}{3}A, \frac{16}{15}B, \frac{36}{35}C, \frac{64}{63}D$, &c. ubi Numeratores sunt quadrata numerorum parium & unitate majores Denominatoribus. Æquatio ad hanc Seriem erit $T' = \frac{zz}{zz - \frac{1}{4}}T$, existentibus $1, 2, 3, 4$, &c. valoribus Abscissæ z successivis: ergo comparando hanc Æquationem cum illâ in Propositione, erit $r = -\frac{1}{4}$, quo substituto prodit

$$T = A - \frac{A}{4z} + \frac{3B}{8.z+1} + \frac{15C}{12.z+2} + \frac{35D}{16.z+3} + \frac{63E}{20.z+4} + \&c.$$

Et ad determinandum Coefficientem A , quære Terminum Seriei decimum, nempe $1.5300.1727.35$, quem substitue pro T , & interea pro z valorem suum correspondentem 10 ; atque obtinebis

$$1.5300.1727.35 = A \text{ in } 1 - \frac{1}{4.10} - \frac{1.3}{4.8.10.11} - \frac{1.3.15}{4.8.12.10.11.12} - \&c.$$

Hoc est, colligendo Terminos in unum, $1.5300.1727.35 = A$ in $.9740.392454$, & exinde $A = 1.57079633$, utique semicircumferentiæ Circuli: quo dato, facillime dabitur Terminus quilibet Seriei interpolandæ primarius vel intermedius. Constat autem ultimum ejus Terminum,

minum, five factum sub omnibus $\frac{4}{3} \times \frac{16}{15} \times \frac{36}{35} \times \frac{64}{63} \times \frac{100}{99} \times \&c.$ æquale esse primo Coefficienti A, adeoque semiperiferiæ Circuli.

PROPOSITIO XXVIII.

Invenire summam quocunque Logarithmorum, quorum numeri sunt in progressionem Arithmetica.

Designent $x+n, x+3n, x+5n, x+7n, \dots, z-n$, quocunque numeros in progressionem Arithmeticâ, quorum primus & $x+n$, ultimus $z-n$, & communis differentia $2n$. Insuper denotent l_z & l_x Logarithmos Tabulares numerorum z & x ; sitque $a = .43429.44819.03252$, scilicet reciproco Logarithmi naturalis Denarii. Atque summa Logarithmorum propositorum æqualis erit differentię inter Series duas sequentes

$$\frac{zl_z}{2n} - \frac{ax}{2n} - \frac{an}{12z} + \frac{7an^3}{360z^3} - \frac{31an^5}{1260z^5} + \frac{127an^7}{1680z^7} - \frac{511an^9}{1188z^9} + \&c.$$

$$\frac{xl_x}{2n} - \frac{ax}{2n} - \frac{an}{12x} + \frac{7an^3}{360x^3} - \frac{31an^5}{1260x^5} + \frac{127an^7}{1680x^7} - \frac{511an^9}{1188x^9} + \&c.$$

Hæ autem Series sic continuantur in infinitum; pone

$$-\frac{1}{3.4} = A,$$

$$-\frac{1}{5.8} = A + 3B,$$

$$-\frac{1}{7.12} = A + 10B + 5C,$$

$$-\frac{1}{9.16} = A + 21B + 35C + 7D,$$

$$-\frac{1}{11.20} = A + 36B + 126C + 84D + 9F,$$

&c.

Ubi numeri qui multiplicantur in A, B, C, D, &c. in diversis valoribus sunt Unciæ alternæ in dignitatibus imparibus binomii. Hisce præmissis, erit Coefficientens Terminii tertii $-\frac{1}{12} = A$, is quarti $+\frac{7}{360} = B$, quinti $-\frac{31}{1260} = C$, & sic deinceps.

DEMON-

DEMONSTRATIO.

Minuatur variabilis z decremento suo $2n$; vel quod idem est, substituat $z-2n$ pro z in Serie

$$\frac{zl, z}{2n} - \frac{az}{2n} - \frac{an}{12z} + \frac{7an^3}{360z^3} - \frac{31an^5}{1260z^5} + \&c.$$

& proveniet valor ejusdem successivus

$$\frac{z-2n, z-2n}{2n} - \frac{a}{2n} \times \frac{z-2n}{z-2n} - \frac{an}{12 \cdot z-2n} + \frac{7an^3}{360 \cdot z-2n^3} - \frac{31an^5}{1260 \cdot z-2n^5} + \&c.$$

Hunc subducito de valore priore, Terminis prius ad eandem formam per Divisionem reductis, & relinquetur $lz - \frac{an}{z} - \frac{an^2}{2z^2} - \frac{an^3}{3z^3} - \frac{an^4}{4z^4} -$

&c. id est, Logarithmus numeri $z-n$. Adeoque universaliter decrementum duorum valorum successivorum Seriei, æquatur Logarithmo ipsius $z-n$; qui exprimit in genere quemvis Logarithmorum qui erant summandi. Igitur Series erit summa Logarithmorum propositorum, si ab eadem subducatur altera Series. Nam summæ perinde ac Areæ nonnunquam corrigendæ sunt, ut evadant veræ.

EXEMPLUM I.

Proponatur invenire summam Logarithmorum decem numerorum 101, 103, 105, 107, 109, 111, 113, 115, 117, 119; hi collati cum hisce $x+n$, $x+3n$, $x+5n$, --- $z-n$, dant differentiam communem $2n=2$, & $n=1$; atque primum $x+1=101$, secundum vero $z-1=119$; unde $x=100$, $z=120$. Hisce autem substitutis, & .43429.44819.03252 pro a ; atque Logarithmis ipsorum 100 & 120 respective pro l, x & l, z ; valores duarum Serierum invenientur 78.28491.40012.1 & 98.69290.42601.6, quorum differentia dat 20.40799.02589.5 pro Summa Logarithmorum desiderata.

EXEMPLUM II.

Quærat jam Summa Logarithmorum numerorum 11, 12, 13, --- 1000, quorum primus est 11, & ultimus 1000, & differentia communis unitas.

Est igitur $n=\frac{1}{2}$, $x+\frac{1}{2}=10$, $z-\frac{1}{2}=1000$; unde $x=\frac{21}{2}$, $z=\frac{2001}{2}$; quibus scriptis, & Logarithmis ipsorum $\frac{21}{2}$ & $\frac{2001}{2}$ pro l, x & l, z ; prodeunt pro valoribus Serierum 2567.20555.42879 & 6.16067.30987,

6.16067.30987, quorum differentia relinquit 2561.04488.11892 pro Summâ Logarithmorum quæsitâ.

Ceterum si velis summam quocunque Logarithmorum numerorum naturalium 1, 2, 3, 4, 5, &c. pone $z = n$ esse ultimum numerorum, existente $n = \frac{1}{2}$; & tres vel quatuor Termini hujus Seriei $z, z - az -$

$\frac{a}{24z} + \frac{7a}{2880z^3} - \&c.$ additi Logarithmo circumferentiæ Circuli cujus Radius est Unitas, id est, huic 0.39908.99341.79 dabunt summam quæsitam, idque eo minore labore quo plures Logarithmi sunt summandi.

Sic si ponas $z = \frac{1}{2} = 1000$, vel $z = \frac{2001}{2}$ valor Seriei erit 2567.20555.42879 ut antea; qui adjectus Logarithmo constanti efficit 2567.60464.42221 pro summâ Logarithmorum, primorum mille numerorum hujus Seriei 1, 2, 3, 4, 5, &c.

EXEMPLUM III.

Oporteat invenire Unciam quingentesimam in dignitate Binomii millesimâ. Constat per Theorema *Newtoni* pro evolvendo Binomio Unciam illam æqualem esse producto sub quadringenti & nonaginta novem factoribus $\frac{1000}{1}, \frac{999}{2}, \frac{998}{3}, \frac{997}{4}, \frac{996}{5}, \dots, \frac{502}{499}$; quorum primus est $\frac{1000}{1}$, & ultimus $\frac{502}{499}$; existentibus tum Numeratoribus tum Denominatoribus in progressionem Arithmetica. Ad inveniendam summam Logarithmorum Numeratorum 1000, 999, 998, 997, $\dots$ 502; pone differentiam communem $1 = 2n$, maximum eorum $1000 = z - \frac{1}{2}$,

minimum 502 $= x + \frac{1}{2}$; eritque $n = \frac{1}{2}$, $z = 1000 \frac{1}{2}$, $x = 501$: quibus substitutis, prodibit 2567.20555.42879 pro valore prioris Seriei, & 1136.38715.63268 pro valore posterioris: horum autem differentia 1430.81839.79611 æqualis est summæ Logarithmorum Numeratorum. Dein ut obtineatur summa Logarithmorum Denominatorum 1, 2, 3, 4, $\dots$ 499; pone $n = \frac{1}{2}$, $z - \frac{1}{2} = 499$, sive $z = 499 \frac{1}{2}$; & hisce scriptis in Serie priore, prodibit ejus valor 1130.98834.85966, cui adjiciatur Logarithmus .39908.99342 juxta regulam in Exemplo priore traditam: & habebis 1131.38743.85308 pro summa Logarithmorum Denominatorum. Quam denique subducito de summa Logarithmorum Numeratorum, atque manebit 299.43095.94303 Logarithmus scilicet Unciæ desideratæ.

SCHOLIUM.

Hujusmodi Series $1, \frac{r}{p} A, \frac{r+1}{p+1} B, \frac{r+2}{p+2} C, \&c.$ interpolatur per Propositionem vigesimam sextam, ubi differentia inter r & p est exigua: & per hanc Propositionem generaliter nullâ ratione habitâ istius differentiae. Atque eodem plane modo invenire licet summam Logarithmorum Numerorum, qui sunt longe magis compositi quam æquidifferentes; eoque pacto assignare Terminos Serierum quarum intercalatio pro difficillima haberi solet. Per hoc quoque Problema inveniuntur Areae Curvarum quarum Ordinatae sunt hujusmodi $1-x^{1000}$, ubi index Binomii est permagnus; sed in eo casu solo quando pars Areae quaesita jacet supra partem Abscissae æqualem Unitati.

Et sane omnia fere Problemata de Interpolationibus huic Analyfi subjiuntur, imo etiamsi tres vel plures Termini Seriei intercalandae ingrediuntur Æquationem Differentialem: harum enim resolutionem in potestate habeo. Atque hic notare libet Series quæ prodeunt per Parabolam *Newtoni*, prodire etiam per nostram methodum. Proponatur enim intercalatio Seriei

$$a, \frac{r+n}{r} a, \frac{r+n+1}{r+1} b, \frac{r+n+2}{r+2} c, \frac{r+n+3}{r+3} d, \&c.$$

quæ definitur Æquatione $T' = \frac{z+n+r}{z+r} T$, in qua valores Abscissae z successivi sunt 0, 1, 2, 3, &c. Ea vero scribatur in modum sequentem $z+r \times T - T = nT = 0$; & fingatur

$$T = A + Bz + Cz.z-1 + Dz.z-1.z-2 + Ez.z-1.z-2.z-3 + \&c.$$

Atque substituendo T' pro T , & $z+1$ pro z , obtinebitur

$$T' = A + Bz+1 + Cz+1.z + Dz+1.z.z-1 + Ez+1.z.z-1.z-2 + \&c.$$

$$\text{Unde } T' - T = B + 2Cz + 3Dz.z-1 + 4Ez.z-1.z-2 + \&c.$$

Hisce autem valoribus substitutis in Æquatione resolvenda, & membris reductis ad eandem formam, resultabit

$$\left\{ \begin{array}{l} +rB \\ -nA \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} +2.r+1C \\ -n-1B \end{array} \right\} z \left\{ \begin{array}{l} +3.r+2D \\ -n-2C \end{array} \right\} z.z-1 \left\{ \begin{array}{l} +4.r+3E \\ -n-3D \end{array} \right\} z.z-1.z-2 + \&c. = 0.$$

Denique ponendo membra homologa æqualia nihil, habebitur $B =$

$$\frac{n}{r} A, C = \frac{1}{2} \times \frac{n-1}{r+1} B, D = \frac{1}{3} \times \frac{n-2}{r+2} C, E = \frac{1}{4} \times \frac{n-3}{r+3} D, \&c.$$

Adeoquæ

$T =$

$$T = A + A \times \frac{n}{r} \times \frac{z}{1} + A \times \frac{n}{r} \times \frac{z}{1} \times \frac{n-1}{r+1} \times \frac{z-1}{r+2} + \&c.$$

Hoc est

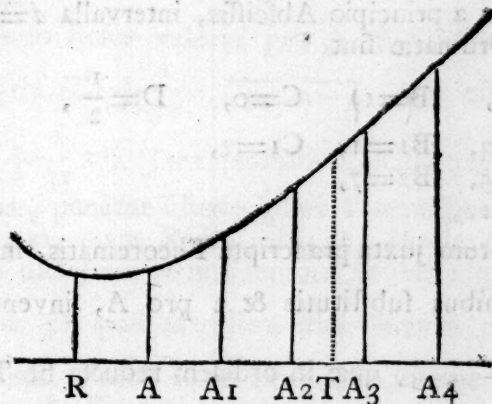
$$T = A + \frac{n}{r} A \frac{z}{1} + \frac{n-1}{r+1} B \frac{z-1}{2} + \frac{n-2}{r+2} C \frac{z-2}{3} + \frac{n-3}{r+3} D \frac{z-3}{4} \&c;$$

Ubi A, B, C, D, &c. non amplius denotant Coefficientes, sed Terminos totos. Et prima Coefficientis A quæ ex Æquatione non determinatur, æqualis est Termino Seriei interpolandæ qui transit per initium Abscissæ z. Et hic est ipsissimus valor Termini T qui prodisset per Propositionem decimam nonam. Atque etiam Series quas exhibet Propositio vigesima inveniuntur per resolutionem Æquationum Differentialium, assumendo debitam formam radicis.

PROPOSITIO XXIX.

Detur Series Ordinatarum intervallis quibuscunque ab invicem distantium, pergens vero ex una tantum parte in infinitum; & oporteat invenire Lineam Parabolicam quæ transit per extremitates omnium.

Sint A, A₁, A₂, A₃, A₄, &c. Ordinatæ insistentes Abscissæ in angulis rectis; sitque R punctum quodlibet in Abscissâ; & ponatur a = RA, b = RA₁, c = RA₂, d = RA₃, e = RA₄, &c. scilicet sint a, b, c, d, e, &c. intervalla inter Ordinatas & punctum R respective. Atque designet T Ordinatam quamvis in genere cujus distantia a puncto R sit z. Dein ponatur



B =

$$B = \frac{A_1 - A}{b - a}, \quad C = \frac{B_1 - B}{c - a}, \quad D = \frac{C_1 - C}{d - a}, \quad E = \frac{D_1 - D}{e - a}, \quad \&c.$$

$$B_1 = \frac{A_2 - A_1}{c - b}, \quad C_1 = \frac{B_2 - B_1}{d - b}, \quad D_1 = \frac{C_2 - C_1}{e - b}, \quad \&c.$$

$$B_2 = \frac{A_3 - A_2}{d - c}, \quad C_2 = \frac{B_3 - B_2}{e - c}, \quad \&c.$$

$$B_3 = \frac{A_4 - A_3}{e - d}, \quad \&c.$$

&c.

Atque erit Ordinata $T = A +$

$$B \times \overline{z - a} +$$

$$C \times \overline{z - a} \times \overline{z - b} +$$

$$D \times \overline{z - a} \times \overline{z - b} \times \overline{z - c} +$$

$$E \times \overline{z - a} \times \overline{z - b} \times \overline{z - c} \times \overline{z - d} +$$

$$F \times \overline{z - a} \times \overline{z - b} \times \overline{z - c} \times \overline{z - d} \times \overline{z - e} +$$

&c.

Notandum est principium Abscissæ, nempe punctum R. sumi ad arbitrium, vel inter Ordinatæ vel extra omnes ut in Schemate; dummodo signorum $+$ & $-$ debita habeatur ratio. Propositio autem demonstratur substituendo Ordinatæ $A, A_1, A_2, \&c.$ successive pro T , & interea pro z longitudines ejus ordine succedentes $a, b, c, \&c.$ Nam sumendo differentias Æquationum provenientium & dividendo easdem per intervalla Ordinarum, obvenient valores Coefficientium supra assignati.

EXEMPLUM I.

Sint Ordinarum a principio Abscissæ, intervalla $a=2, b=3, c=5, d=6$; ipsa vero Ordinatae sint.

$$A=2, \quad B=1, \quad C=0, \quad D=\frac{1}{2},$$

$$A_1=3, \quad B_1=1, \quad C_1=2,$$

$$A_2=5, \quad B_2=7,$$

$$A_3=12,$$

Et ineundo computum juxta præscripta Theorematis, invenietur $B=1,$

$C=0, D=\frac{1}{2}$; quibus substitutis & 2 pro A , invenietur $T = 2 +$

$$\frac{1}{2} \times \overline{z-1} \times \overline{z-3} \times \overline{z-5}, \text{ quæ in ordinem reducta fit } T =$$

$$z^3 - 10z^2 + 17z - 6$$

$\frac{z^3 - 10z^2 + 33z - 30}{2}$. Etenim si inibi scribantur 2, 3, 5, 6, pro z ; prodibunt Ordinatae propositae 2, 3, 5, 12.

EXEMPLUM II.

Oporteat determinare tempus Solstitii ex datis aliquot Solis altitudinibus meridianis circa idem tempus. Designent Ordinatae altitudines solis, earumque intervalla denotent tempora inter observationes; tum transeat Parabola per extremitates Ordinarum, & Abscissa ejus quae correspondet minimae Ordinatae, sive ea sit una e datis vel quævis intermedia, determinabit momentum temporis quo Sol ingreditur Tropicum. Exempli gratia *B. Waltherus* Anno 1500, *Norimbergæ* observavit distantias solis a Zenith ut sequitur

$$\left. \begin{array}{l} 44975 \\ 44934 \\ 44883 \\ 44990 \end{array} \right| \begin{array}{l} 8^{\text{vo}} \\ 9^{\text{no}} \\ 12^{\text{mo}} \\ 16^{\text{to}} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 44975 \\ 44934 \\ 44883 \\ 44990 \end{array}} \right\} \text{Junii}$$

Sit jam distantia observata die octavo Ordinata prima, & in eadem sit principium Abscissæ; eritque $a=0$, $b=1$, $c=4$, $d=8$; & computus erit

$$A = 44975, \quad B = -41, \quad C = +6, \quad D = +\frac{1}{32},$$

$$A_1 = 44934, \quad B_1 = -17, \quad C_1 = +\frac{175}{28},$$

$$A_2 = 44883, \quad B_2 = +\frac{107}{4},$$

$$A_3 = 44990,$$

Atque substituendo hosce valores pro A, B, C, D ; invenietur $T =$

$$44975 - 41z + 6z.z - 1 + \frac{1}{32}z.z - 1.z - 4, \text{ hoc est, } T = 44975 -$$

$$\frac{375}{8}z + \frac{187}{32}z^2 + \frac{1}{32}z^3. \text{ Jam quoniam Abscissa quæsitæ correspondet}$$

Ordinatae minimæ, ponatur Fluxio ipsius T æqualis nihil, & habebitur $375z + 374z = 1500$, cujus Radix 3.889355 exprimit dies elapsos inter meridiem octavi diei Junii & momentum Solstitii: quod itaque accidit

21 hor. 20 $\frac{2}{3}$ min. pr. post meridiem diei decimæ primæ, secundum

hasce Observationes. Potest etiam tempus Solstitii determinari per plures Observationes & Parabolam plurium dimensionum; vel per tres

Observationes adhibendo Parabolam Conicam, uti docuit *Halleius*. Sed oportet differentias inter altitudines observatas, esse sensibilibiter majores erroribus qui committi queant inter observandum, alias nihil certi concludi poterit.

SCHOLIÖN.

Newtonus utitur hac Propositione in determinando locum Cometæ qui cadit inter aliquot loca Observationibus nota. Nimirum si observentur quotvis longitudines designatæ per totidem Ordinatæ, quarum intervalla proportionalia sunt temporibus inter Observationes, & describatur Parabola per Ordinarum extremitates; Ordinatæ hujus figuræ intermediæ denotabunt longitudines Cometæ intermedias pro temporibus quæ sunt proportionalia Abscissis. Et eadem methodo dabitur latitudo pro quovis tempore ex datis aliquot latitudinibus. Ex longitudine autem & latitudine datis datur locus Cometæ in Cælis. Et hunc in modum plurima observatu difficilia determinari possint satis accurate ex Observationibus aliquot anterioribus & posterioribus.

Applicabilis est etiam hæc Propositio ad resolutionem Æquationum purarum affectarumve. Nam in Æquatione resolvenda scribendo pro radice numeros ab eadem haud multum discrepantes; provenient eorum intervalla, qui dein interpolati exhibebunt radicem. Sed post resolutionem Æquationum *Hallei* frustra compendiosior speranda est.

In casu quando intervalla Ordinarum diminuuntur in infinitum hoc Problema dabit radicem Æquationis fluxionalis, etiamsi nec radix neque altera indeterminata fluat uniformiter; & hoc merâ substitutione fluxionum Radicis pro differentiis Ordinarum, & pro earum intervallis fluxiones Abscissæ. Nam sicuti casus Ordinarum æquidistantium respondet fluxionibus Abscissæ uniformiter crescentibus; ita hæc Propositio fluxionibus quâcunque lege variantibus. Et resolutio Æquationis fluxionalis in quâ utraque indeterminata fluit quâcunque lege, non est Corollarium ex hac Propositione, sed Casus ejusdem omnium simplicissimus: quod obiter hic monere visum est, ut pateat Methodum Differentialem generalissime complecti universam Serierum doctrinam, quod forte alii non perceperint.

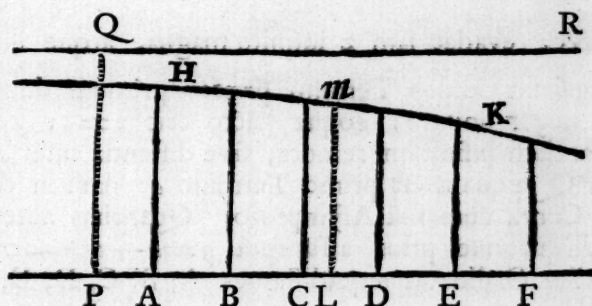
PROPOSITIO XXX.

Invenire Asymptoton Hyperbolæ generis Logarithmici ex datis ejus Ordinatis aliquot æquidistantibus.

Sint Ordinatæ æquidistantes A, B, C, D, E, &c. insistentes super Abscissam PL in angulis rectis: sitque QR Asymptotos Curvæ parallela

rallela Abscissæ, & intervallo P Q ab eâdem distans. Apelletur vero Abscissa quævis A L z, & Ordinata correspondens L m y. Hyperbola autem Logarithmica H m K definiatur Æquatione hujus formæ

$$y = a - br^z - cr^{2z} - dr^{3z} - er^{4z} - \&c.$$



Ubi $r, a, b, c, d, e, \&c.$ sunt quantitates invariabiles; atque erit distantia inter Abscissam & Asymptoton, hoc est,

$$\begin{aligned} PQ = & A + \\ & \frac{A-B}{r-1} + \\ & \frac{rA - r^2B + C}{r-1, r^2-1} + \\ & \frac{r^3A - r^4B + r^2C - B}{r-1, r^2-1, r^3-1} + \\ & \frac{r^6A - r^6B + r^5C + r^4D + E}{r-1, r^2-1, r^3-1, r^4-1} + \\ & \&c. \end{aligned}$$

Coefficientes literarum A, B, C, D, &c. in diversis Terminis, formantur per continuam multiplicationem numerorum 1, $\frac{n-1}{r-1}$, $\frac{n-r}{r^2-1}$, $\frac{n-r^2}{r^3-1}$, $\frac{n-r^3}{r^4-1}$, &c. In primo autem Termino est $n=r^0$, in secundo $n=r^1$, in tertio $n=r^2$, in quarto $n=r^3$, & sic porro. Exempli gratiâ, in quarto Termino Coefficientes sumpti ordine inverfo sunt 1, $1+r+r^2$, $r+r^2+r^3$, r^3 , neglectis signis; est vero $1 \times \frac{r^3-1}{r-1} = 1+r+r^2$, $1+r+r^2 \times \frac{r^3-r}{r^2-1} = r+r^2+r^3$, denique $r+r^2+r^3 \times \frac{r^3-r^2}{r^3-1} = r^3$; sic itaque inveniuntur Coefficientes. In hac autem Propositione excipio

pio casum in quo est $r = \pm 1$; tunc enim degenerat Hyperbola in lineam rectam.

Series vero sic investigatur. In Æquatione assumptâ $y = a - br^x - cr^{2x} - \&c.$ mutetur signum Abscissæ z , & prodibit $y = a - \frac{b}{r^x} - \frac{c}{r^{2x}} - \&c.$ evadat jam z infinite magna, atque in valore Or-

dinatæ y evanescent omnes Termini præter primum dummodo concipiatur r esse major unitate; eoque pacto erit $y = a$; hoc est, Ordinata ad distantiam infinitam remota, sive distantia inter Abscissam & Asymptoton PQ æqualis est primo Terminò a : nam in distantia infinitâ coincidit Curva cum suâ Asymptoto. Quantitas autem a sic investigatur in Æquatione prius assumptâ $y = a - br^x - cr^{2x} - dr^{3x} - er^{4x} - \&c.$ scribe Ordinatæ æquidistantes A, B, C, D, E, &c. successive pro y , & interea 0, 1, 2, 3, 4, &c. pro Abscissâ z : ac prodibunt Æquationes

$$A = a - b - c - d - e - \&c.$$

$$B = a - br - cr^2 - dr^3 - er^4 - \&c.$$

$$C = a - br^2 - cr^4 - dr^6 - er^8 - \&c.$$

$$D = a - br^3 - cr^6 - dr^9 - er^{12} - \&c.$$

$$E = a - br^4 - cr^8 - dr^{12} - er^{16} - \&c.$$

&c.

Habentur igitur tot Æquationes quot sunt incognitæ $a, b, c, d, e, \&c.$ ex quibus quærat a per Algebram vulgarem, atque ejus valor prodibit idem ac jam ipsi PQ assignatus est. Q. E. D.

Corollarium. Hinc si dentur aliquot Termini initiales in Serie infinitâ, quorum differentiæ sunt proxime in progressionem Geometricâ, dabitur ultimus omnium utique qui removetur ad distantiam infinitam ab initio. Nam si A, B, C, D, &c. ordine inverso sumpti, designent Terminos quorum differentiæ sunt fere in proportionem Geometricâ ut $r^0, r^1, r^2, r^3, \&c.$ ultimus omnium æqualis erit PQ intervallo inter Abscissam & Asymptoton: vel stylo Gregoriano dabitur Terminatio Seriei.

EXEMPLUM.

Datis Polygonis aliquot regularibus Circulo inscriptis, invenire ultimum Polygonorum sive Aream Circuli. Ea sunt

4	2.00000.00000.0000 = F	3.14033.11569.5475
8	2.82842.71247.4619 = E	126.08888.0294
16	3.06146.74589.2072 = D	6072.7439
32	3.12144.51522.5805 = C	5.5652
64	3.13654.84905.4594 = B	119
128	3.14033.11569.5475 = A	
		3.14159.26535.8979

Dicatur jam ultimum Polygonum A, penultimum B, antepenultimum C, & sic retro. Et quoniam eorum differentiae A—B, B—C, C—D, &c. sunt quamproxime ut Termini 1, 4, 16, 64, 256, &c. id est, ut dignitates Quaternarii, erit $r=4$; quo substituto, Series generalis evadit

$$A + \frac{A-B}{3} + \frac{4A-5B+C}{3.15} + \frac{64A-84B+21C-D}{3.15.63} + \&c.$$

In qua scribe pro A, B, C, &c. suos valores, & primi quinque Termini dabunt Aream Circuli ad quindecim loca figurarum, ut ex computo apposito manifestum est. Et similiter res confit per Polygona circumscripta.

Hâc autem ratione quævis Series summari potest. Nam si Ordinatae æquidistantes denotent summas successivas, valor totius Seriei æquabitur distantiae inter Asymptoton & Abscissam. Si Series summanda sit hujusmodi $a + bx + cx^2 + dx^3 + \&c.$ ubi $x, x^2, x^3, \&c.$ denotant partes Terminorum quæ sunt in progressionem Geometrica, erit $r=x$; & valor ipsius PQ converget eo celerius quo longius Summæ successivæ distant a principio, quæ denotantur per A, B, C, D, &c. In casu autem quando est $r=\pm 1$, assumenda est Hyperbola quæ definitur hujusmodi Equatione $y=\frac{1}{z^n}$ in $a + \frac{b}{z} + \frac{c}{z^2} + \frac{d}{z^3} + \&c.$ vice Hyperbolæ Logarithmicæ; atque index n determinabitur ex naturâ Seriei summandæ.

Notandum est Series infinitas æque summari posse per Parabolam Newtoni ac per hæc Hyperbolas. Nam Ordinatae quæ in Hyperbolis sunt æquidistantes, si ad certas quasdam distantias constituentur; exhibebunt, ope Parabolæ, easdem expressiones pro valoribus Serierum.

Numerus figurarum quæ veræ sunt in Polygono A, duplicantur per duos Terminos Seriei, triplicantur per tres, & ita deinceps. Sic in Exemplo allato sunt tres veræ figuræ 314 in Polygono A; & inde quinque Termini dederunt Aream Circuli ad quindecim figurarum loca. Et hæ sunt Approximationes quales olim invenerunt Jacobus Gregorius & Hugenus: hic quidem triplicavit veras figuras, at ille easdem quadruplicavit, quintuplicavit, imo sine limite produxit, uti viderè est in Appendice ad Veram Circuli & Hyperbolæ Quadraturam.

PROPOSITIO XXXI.

Invenire Aream cujusvis Curvæ quamproxime ex datis aliquot ejus Ordinatis æquidistantibus.

Per extremitates Ordinarum describe figuram Parabolicam, ejusque Area quæ invenitur per methodos notas, proxime æquabitur Area Curvæ propositæ. Q. E. I.

SCHOLION.

Quoniam laboriosum esset semper recurrere ad Parabolam, computavi Tabulam sequentem quæ exhibet Aream Curvæ directe ex datis aliquot ejus Ordinatis æquidistantibus.

Tabula Arearum.

$$\begin{array}{r|l}
 3 & \frac{A+4B}{6} R \\
 5 & \frac{7A+32B+12C}{90} R \\
 7 & \frac{41A+216B+27C+272D}{840} R \\
 9 & \frac{989A+5888B+928C+10496D-4540E}{28350} R
 \end{array}$$

Tabula Correctionum.

$$\begin{array}{r|l}
 3 & \frac{P-4A+6B}{180} R \\
 5 & \frac{P-6A+15B-20C}{470} R \\
 7 & \frac{P-8A+28B-56C+70D}{930} R \\
 9 & \frac{P-10A+45B-120C+210D-252E}{1600} R
 \end{array}$$

In hisce Tabulis A est summa primæ & ultimæ Ordinatæ, B secundæ & penultimæ, C tertiæ & antepenultimæ, & sic porro usque dum deventum

deventum fuerit ad Ordinatam in medio omnium quæ per ultimam literarum A, B, C, &c. representatur. R est basis supra quam jacet Area, seu pars Abscissæ inter primam & ultimam Ordinatam intercepta. P est summa duarum Ordinarum quarum una consistit ante primam, altera post ultimam ad distantias æquales intervallo communi reliquarum Ordinarum. Numerus autem Ordinarum qui hic est impar, signatur ad latera Tabularum. Expressiones in Tabula Arearum sunt Areæ contentæ inter Basim, Curvam & Ordinatas hinc inde extremas. Eæ vero in Tabula Correctionum sunt ejusdem circiter magnitudinis ac differentia inter Areas veras & eas per Tabulam prodeuntes: adeoque si prima figura Correctionis inveniatur, dein adjiciatur ubi Correctio est negativa, vel subducatur quando eadem est affirmativa; concludere tuto licet Aream sic correctam, veram esse in eo loco decimalium in quo intrat prima figura Correctionis, nec ultra. Itaque per Tabulam Correctionum Area inventa corrigitur, & simul numerus figurarum verarum dignoscitur.

EXEMPLUM.

Sit $\frac{1}{1+x}$ Ordinata^o Hyperbolæ æquilateræ, & quærat Area ejus quæ jacet supra Abscissam unitati æqualem. Pro x scribe successive

$\frac{0}{8}, \frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8}, \frac{5}{8}, \frac{6}{8}, \frac{7}{8}, \frac{8}{8}$, & provenient novem Ordinatae

$$\frac{8}{8}, \frac{8}{9}, \frac{8}{10}, \frac{8}{11}, \frac{8}{12}, \frac{8}{13}, \frac{8}{14}, \frac{8}{15}, \frac{8}{16}$$

Igitur est $A = \frac{8}{8} + \frac{8}{16} = \frac{3}{2}$, $B = \frac{8}{9} + \frac{8}{15} = \frac{64}{45}$, $C = \frac{8}{10} + \frac{8}{14} = \frac{48}{35}$,

$D = \frac{8}{11} + \frac{8}{13} = \frac{192}{143}$, $E = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$: & hisce substitutis in ultima expressione Arearum, & unitate pro R, oritur Area .69314721. De-

inde in Ordinata $\frac{1}{1+x}$ scribe $\frac{-1}{8}$ & $+\frac{9}{8}$ successive pro x , & proveni-

ent duæ Ordinatae $\frac{8}{7}$ & $\frac{8}{17}$, quarum prior stat ante primam, & posterior

post ultimam; adeoque $P = \frac{8}{7} + \frac{8}{17} = \frac{192}{119}$: quem substitue pro P;

& pro A, B, C, D, E, suos valores, & Correctio pro novem Ordinatis dabit +.00000003, quæ quum affirmativa sit, subducatur a valore Areæ prius invento, & restabit .69314718 accurata in ultima figura.

Compu-

Computaveram hæc Tabulas ulterius, ceterum Expressiones pro undecem aut pluribus Ordinatis sunt usibus inepti propter immensam magnitudinem Coefficientium numeralium. Sin vero novem Ordinatae non dent Aream satis accuratam; dividatur basis in duas vel plures partes; & inde Area dividetur in totidem, quarum quamque si quæras seorsim per novem Ordinatas, habebis totam Aream pro lubitu accuratam. Sed & nonnunquam convenit quærere partem Areæ per Seriem infinitam, præsertim si Curva decussit basin in angulo recto. Atque hisce præcognitis, Area quævis habebitur satis accurate per Tabulam jam appositam.

Sed & Areæ Curvarum haud incommode exprimi possint per Differentias Ordinarum æquidistantium ad modum sequentem.

Tabula Arearum per Differentias Ordinarum.

$$\begin{array}{l|l}
 1 & A \\
 3 & A + \frac{1}{6} B \\
 5 & A + \frac{2}{3} B + \frac{7}{90} C \\
 7 & A + \frac{3}{2} B + \frac{11}{20} C + \frac{41}{840} D \\
 9 & A + \frac{8}{3} B + \frac{86}{45} C + \frac{92}{189} D + \frac{3}{86} E \\
 11 & A + \frac{25}{6} B + \frac{175}{36} C + \frac{3445}{1512} D + \frac{4045}{9072} E + \frac{94}{3503} F \\
 13 & A + 6B + \frac{103}{10} C + \frac{158}{21} D + \frac{1833}{700} E + \frac{4813}{11550} F + \frac{66}{3050} G
 \end{array}$$

In hac Tabula A est Ordinata in medio omnium, B est differentia secunda trium Ordinarum in medio, C est differentia quarta quinque Ordinarum in medio, & sic porro ad ultimam literarum A, B, C, D, E, F, G, quæ est ultima differentia omnium Ordinarum. Ut si sint quinque Ordinatae a, b, c, d, e ; erit $A = c$, $B = b - 2c + d$, $C = a - 4b + 6c - 4d + e$. Et sic in aliis casibus. Expressiones autem ductæ in basin Curvæ, sive partem Abscissæ contentam inter primam & ultimam Ordinam, dant Areas ex dato numero Ordinarum qui signatur ad latus. Notandum est ultimos Terminos in expressionibus pro novem, undecem & tredecem Ordinatis, non esse veros sed hisce simpliciores & vero satis proximos. Nam Ordinata media A & differentia B, C, D, E, &c. constituunt Seriem convergentem; ideoque non

non requiritur ut Coefficientes ultimorum Terminorum qui intrant computum, sint præcisè accurati. Ex convergentia autem Seriei A, B, C, D, &c. dignoscitur ad quot figuras Area exhibetur accurata; ideoque hæc Tabula non indiget Tabulâ Correctionum. Sed & Coefficientes numerales sunt longe magis exigui quam in Tabula superiore, atque eâ de causâ hæc præferenda est, præsertim in magno Ordinatarum numero.

Quæratursus Area Hyperbolæ, cujus Ordinata est $\frac{1}{1+x}$; pro x scribe 0, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{4}$; & provenient quinque Ordinatæ æquidistantes 1, $\frac{4}{5}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{1}{2}$: erit igitur $A = \frac{2}{3}$, nempe Ordinatæ mediæ: $B = \frac{4}{105}$, scilicet differentiæ secundæ trium Ordinatarum in medio $\frac{4}{5}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{7}$: denique $C = \frac{1}{70}$, hoc est, æqualis ultimæ differentiæ omnium. Et hi valores substituti in Expressione pro quinque Ordinatis dant $\frac{2}{3} + \frac{8}{315} + \frac{1}{900} = \frac{4367}{6300}$, quæ ducta in basin sive unitatem & reducta ad decimales, evadit .69317 pro Areâ quæsita. Et hæc Area ad minimum justa est in quarto decimalium loco, in quo scilicet intrat prima figura ultimi Termini $\frac{1}{900}$.

Sed ut differentiæ promptius ac facilius inveniantur; sit *a* Ordinata media, *b* summa duarum hinc inde mediæ proximarum, dein *c* summa duarum quæ hinc inde sequuntur, & sic porro; tum pone

$$A = a,$$

$$B = b - 2A,$$

$$C = c - 2A - 4B,$$

$$D = d - 2A - 9B - 5C,$$

$$E = e - 2A - 16B - 20C - 8D,$$

$$F = f - 2A - 25B - 50C - 35D - 10E,$$

$$G = g - 2A - 36B - 105C - 112D - 54E - 12F,$$

Atque A, B, C, D, &c. erunt Ordinata media, differentia secunda trium mediarum, quarta quinque mediarum, & sic porro in reliquis respective.

PROPOSITIO XXXII.

Designent $a, b, c, d, e, f, \&c.$ Terminos æquidistantes continue tendentes ad rationem æqualitatis, & Æquationes sequentes approximabunt ad eorundem relationes.

$$\begin{array}{l|l}
 2 & a-b=0 \\
 3 & a-2b+c=0 \\
 4 & a-3b+3c-d=0 \\
 5 & a-4b+6c-4d+e=0 \\
 6 & a-5b+10c-10d+5e-f=0 \\
 7 & a-6b+15c-20d+15e-6f+g=0 \\
 8 & a-7b+21c-35d+35e-21f+7g-h=0 \\
 9 & a-8b+28c-56d+70e-56f+28g-8h+i=0 \\
 10 & a-9b+36c-84d+126e-126f+84g-36h+9i-k=0 \\
 & \&c.
 \end{array}$$

Hæc Tabula in usum reservanda est, ut consulatur quoties opus sit. Patet autem Coefficientes numerales esse Uncias dignitatum binomii. Et demonstratio patet: quoniam enim Termini supponuntur continue tendere ad rationem æqualitatis, erunt eorum differentię $a-b, b-c, c-d, d-e, \&c.$ parvę; deinde differentię differentiarum $a-2b+c, b-2c+d, c-2d+e, \&c.$ erunt minores differentiis primis; atque tertię $a-3b+3c-d, b-3c+3d-e, \&c.$ erunt minores secundis; & quartę $a-4b+6c-4d+e, \&c.$ erunt minores tertiis, & sic in infinitum. Ergo differentię primę, secundę, tertię, reliquęque positę æquales nihil ut in Propositione, continue approximabunt ad veram relationem Terminorum. Q. E. D.

Corollarium. Hinc in Serie æquidistantium, si desit Terminus quivis, potest is inveniri per hanc Propositionem. Ut si sint quinque Termini a, b, c, d, e ; eorum relatio erit $a-4b+6c-4d+e=0$; & ex hęc Æquatione dabitur eorum quilibet quamproxime ex datis reliquis.

Et notandum est Terminum quemvis, ceteris paribus, eo accuratius definiri, quo propius constet medio omnium: atque errores a vero esse quamproxime ut Coefficientes numerales Terminorum quęstorum reciproce. Consistat igitur Terminus quęstus vel in medio omnium vel eidem quantum fieri potest proximus.

EXEMPLUM.

EXEMPLUM.

Quærat^r Logarithmus numeri 53 ex datis Logarithmis numerorum aliquot antecedentium. Pone a pro Logarithmo quæsito, eritque

$$\begin{aligned} l_{52} &= b = 1.71600.33436 \\ l_{51} &= c = 1.70757.01761 \\ l_{50} &= d = 1.69897.00043 \\ l_{49} &= e = 1.69019.06800 \\ l_{48} &= f = 1.68124.12374 \\ l_{47} &= g = 1.67209.78579 \end{aligned}$$

Deinde relatio inter septem Terminos a, b, c, d, e, f, g , erit $a - 6b + 15c - 20d + 15e - 6f + g = 0$, adeoque $a = 6b - 15c + 20d - 15e + 6f - g$: ubi substituendo pro b, c, d, e, f, g , suos valores, habebitur 1.72427.58726 pro a sive Logarithmo numeri 53, existente .00000.00030 errore in excessu. Ceterum si dentur sex Logarithmi quorum tres consistunt ante, & tres reliqui post illum qui quæritur; in eo inquam casu Logarithmus quæsitus accuratissime definietur.

Igitur designent A, B, C, D , &c. summas datorum Terminorum qui hinc inde æqualiter distant a quæsito, & ejus valores erunt ut in Tabula sequente

2	$\frac{A}{2}$
4	$\frac{4A - B}{6}$
6	$\frac{15A - 6B + C}{20}$
8	$\frac{56A - 28B + 8C - D}{70}$
10	$\frac{210A - 120B + 45C - 10D + E}{252}$
	&c.

Dentur verbi gratiâ Logarithmi numerorum 50, 51, 52, 54, 55, 56, & oporteat invenire Logarithmum numeri 53. Pone

$$\begin{aligned} l_{52} + l_{54} &= 3.44839.71034 \\ l_{51} + l_{55} &= 3.44793.28656 \\ l_{50} + l_{56} &= 3.44715.80313 \end{aligned}$$

Dein

Dein pro A, B & C substitue hosce valores in Expressione pro sex Terminis, & prodibit 1.72427.58695 pro Logarithmo numeri 53, existente unitate errore in ultima figura. Hinc in Tabulis Logarithmicis, Trigonometricis, Astronomicis, aliisque ejusmodi; si desit forte Terminus quivis, potest is inseri per hanc Propositionem; vel si suspicio sit Terminum quemvis erroneum esse, potest eadem methodo corrigi. Nam Expressiones hic exhibitæ sunt generales, utique quæ non dependent ex natura Tabulæ cujusvis particularis.

PROPOSITIO XXXIII.

Designent &c. $\epsilon, \delta, \gamma, \beta, \alpha, a, b, c, d, e$, &c. Terminos alternos in Serie utrinque excurrente in infinitum, & ponatur $A = a + \alpha$, $B = b + \beta$, $C = c + \gamma$, $D = d + \delta$, $E = e + \epsilon$, & sic porro; atque Terminus in medio inter a & α consistens, æqualis erit

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \times A + \\ & \frac{1}{16} \times \overline{A - B} + \\ & \frac{3}{256} \times \overline{2A - 3B + C} + \\ & \frac{5}{2048} \times \overline{5A - 9B + 5C - D} + \\ & \frac{35}{65536} \times \overline{14A - 28B + 20C - 7D + E} + \\ & \quad \&c. \end{aligned}$$

Coefficientes numerales literarum A, B, C, D, &c. sunt differentiae Unciarum in diversis dignitatibus Binomii: Et Coefficientes qui ducuntur in totos Terminos, scilicet $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{3}{256}$, &c. generantur per continuam multiplicationem numerorum $\frac{1}{4.2}$, $\frac{3}{4.4}$, $\frac{5}{4.6}$, $\frac{7}{4.8}$, &c. Hisce vero præcognitis, Series ad libitum producitur.

Et Series investigatur ponendo $z=0$ in Casu secundo Propositionis vigesimæ; tunc enim habebitur Ordinata sive Terminus qui consistit in medio omnium.

Possint *u*

Interpolatio Serierum.

153

Possint autem Termini Seriei in unam summam colligi ut hic vides,

$$\begin{array}{r|l}
 2 & A \\
 4 & \frac{9A-B}{16} \\
 6 & \frac{150A-25B+3C}{256} \\
 8 & \frac{1225A-245B+49C-5D}{2048} \\
 10 & \frac{39690A-8820B+2268C-405D+35E}{65536}
 \end{array}$$

Prima Expressio est primus Terminus Seriei, secunda est Summa primi & secundi, tertia est Summa trium primorum Terminorum, & sic deinceps. Ex datis itaque Terminis alternis, intermedii confestim dabuntur per hanc Tabulam vel per ipsam Seriem. Prima Expressio $\frac{A}{2}$ sufficit quando secundus Terminus Seriei minor est quam qui ingreditur computum. Et similiter in reliquis; nam Termini Seriei sunt differentiae inter Expressiones & veritatem quamproxime: adeoque semper scire licet quænam expressio sufficit proposito.

Exempli gratiâ, si quærat^{ur} Logarithmus numeri 53 ex datis iis. numerorum 46, 48, 50, 52, 54, 56, 58, 60; pone

$$\begin{aligned}
 l, 52 + l, 54 &= A = 3.44839.71035 \\
 l, 50 + l, 56 &= B = 3.44715.80313 \\
 l, 48 + l, 58 &= C = 3.44466.92309 \\
 l, 46 + l, 60 &= D = 3.44090.90820
 \end{aligned}$$

Et hisce valoribus scriptis in Serie, vel in Expressione pro octo Terminis, habebitur 1.72427.58696 pro Logarithmo numeri 53. Et eadem ratione invenire licet quemvis alium intermedium. In Constructione ergo Tabularum sufficit primo quærere aliquos Terminos in debitis distantis; nam reliqui possunt hâc methodo inseri. Etenim continue intercalandi sunt Termini primo inventi, usque dum perventum fuerit ad ultimos qui ingrediuntur Tabulam. Et notandum est, oportere omnes Terminos computari circa initium Tabulæ propter magnas differentias; dein per saltum pertransire licet alternos decrescen^{tibus} differentiis; & postea ternos, septenosque ubi differentiae sunt minores. Et hæc est methodus quam præcipit *Newtonus*: ceterum præferendæ sunt regulæ particulares deducib^{ile} ex natura Tabulæ construendæ; etenim hæc minore labore plerumque absolvunt opus.

F I N I S.

ERRATA.

PAG. 4. l. 5. pro $z + \frac{2}{3}$, lege $z + \frac{3}{2}$.

Pag. 8. l. 18. pro $z + 4$, lege $z - 4$.

Pag. 44. l. 8. pro $T \times \frac{z-m}{z}$, lege $T \times \frac{z-m}{z}$.

Pag. 67. l. 12. pro $B = \frac{2.3.3}{14.29.29} B$, lege $C = \frac{2.3.3}{14.29.29} B$.

Pag. 76. l. 26. pro $y + xy$, lege $y + xy$.

Pag. 80. l. 13. pro $2xyy$, lege $2xyy$.

Pag. 83. l. pen. pro eritque, lege erit.

Pag. 91. l. 21. dele &c.

Pag. 94. l. 12. pro $\frac{1}{1999}$, lege $\frac{1}{2000}$.

Pag. 115. l. 12. pro media, lege medio.

Pag. 120. l. 3. pro periferiæ, lege semiperiferiæ.

Pag. 122. l. 15. pro 46, lege 4, 6.

Pag. 136. l. 28. pro $x + \frac{1}{2} = 10$, lege $x + \frac{1}{2} = 11$.

Pag. 137. l. 5. pro $r = \frac{1}{2}$, lege $n = \frac{1}{2}$.

Ibid. l. 21. pro $x = 501$, lege $x = 501\frac{1}{2}$.

Pag. 147. l. 18. pro Ordinatæ, lege Ordinata.

Ibid. l. 25. pro $\frac{9}{9}$, lege $\frac{9}{8}$. 8 00 57

